Note om aerodynamik for raketbyggere.

Af

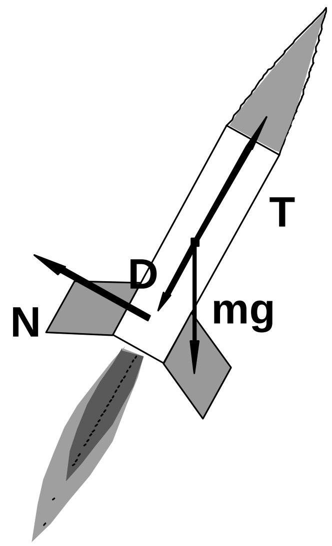
Hans Olaf Toft

DARK august 2000

Indholdsfortegnelse:

Kræfter og bevægelse

På figuren ses de kræfter, der umiddelbart virker på en raket der flyver. Det drejer sig om tyngdekraften mg, raketmotorens thrust T, samt de aerodynamiske kræfter N og D. Egentlig er der kun tale om én aerodynamisk kraft, men af bekvemmelighedsgrunde opløser man denne i en komposant som er modsat rettet rakettens bevægelse D og en komposant vinkelret på rakettens bevægelse. Da D modvirker bevægelsen omtales denne som luftmodstand eller drag, mens N der virker vinkelret på bevægelsen kaldes normalkraften eller lift. På et fly er det N, som får flyet til at lette.



Det fremgår umiddelbart, at alle kræfterne undtagen N virker i rakettens tyngdepunkt, og de beskriver dermed den bane som rakettens tyngdepunkt følger.

N virker i almindelighed ikke i rakettens tyngdepunkt, og påvirker derfor ikke direkte tyngdepunktets bane. Istedet vil N give anledning til et moment omkring tyngdepunktet, som vil få raketten til at dreje sig omkring tyngdepunktet. Da T er orienteret i rakettens længderetning, vil rakettens tyngdepunkt accelerere i den nye retning, hvorfor virkningen af N ikke er ligegyldig for banen, men indgår i den samlede beskrivelse af rakettens bevægelse. Hvis alle de virkende kræfter og angrebspunktet for N kendes, kan de samlede bevægelsesligninger for raketten opstilles og løses. Angrebspunktet for N kaldes traditionelt for CP - center of pressure, analogt med at tyngdepunktet (som er angrebspunkt for alle andre kræfter) kaldes CG - center of gravity.

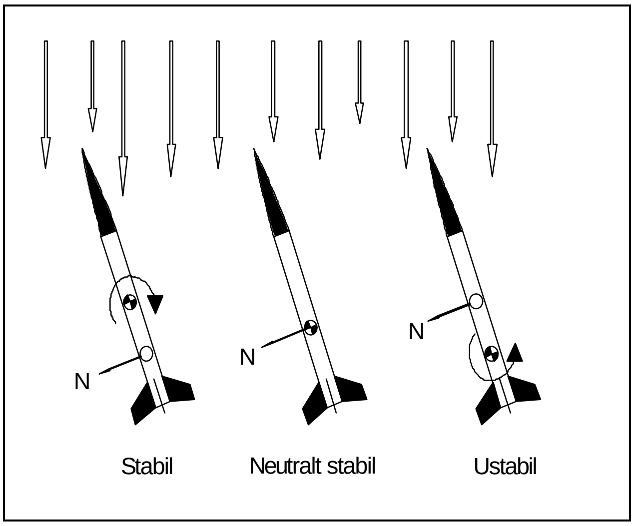
Tyngdekraften på raketten bestemmes relativt let, idet tyngdeaccelerationen g findes i diverse tabelværker. Rakettens masse m, og thrusten T bestemmes ved måling. De aerodynamiske kræfter bestemmes principielt også ved måling, men det kræver adgang til en vindtunnel. For at undgå komplicerede vindtunnelforsøg må de aerodynamiske kræfter søges bestemt ved beregning. Formålet med at bestemme D er naturligvis at luftmodstanden har direkte indflydelse på tyngdepunktets bane, og dermed for rakettens samlede performance. N derimod, har ikke nødvendigvis nogen særlig indflydelse på rakettens performance, men derimod på om raketten flyver stabilt eller ej. Dette kan ses ved den følgende betragtning:

Opskrives det aerodynamiske moment, som N giver anledning til fås:

$$M_A = N \cdot \left(X_{cp} - X_{cg}\right)$$

hvor X_{cg} angiver afstanden fra et rakettens massemidtpunkt til et referencepunkt (efter eget valg) og X_{cp} angiver afstanden fra angrebspunktet for de aerodynamiske kræfter til samme referencepunkt.

Som det ses regnes momentet med fortegn, hvilket afspejler de 3 mulige fysiske forhold, nemlig (regnet fra rakettens næse) at:

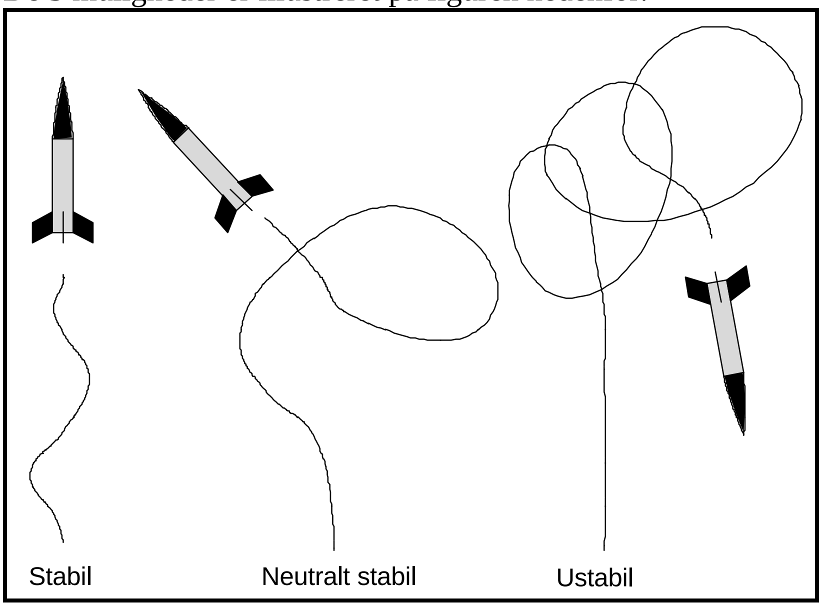


1. cp ligger bagved cg, hvilket betyder at det aerodynamiske moment modvirker angrebsvinklen. I dette tilfælde siges raketten at være *stabil*.
2. cp sammenfalder med cg. Det aerodynamiske moment er uafhængigt af angrbsvinklen, og raketten siges at være *neutralt stabil*.
3. cp ligger foran cg. Det aerodynamiske moment virker nu i samme retning som agrebsvnklen, og raketten siges at være *ustabil*.

Rakettens stabilitet har stor indflydelse på hvordan den flyver, hvis den undervejs i sin bane oplever at blive skubbet lidt ud af kurs. En ustabil raket vil give sig til at snurre rundt og forsøge at flyve med halen forrest. En neutralt stabil raket vil kunne ændre sin retning vilkårligt, hvilket betyder, at man ikke har nogen som helst kontrol på hvor den lander. En stabil raket vil derimod blot 'slå lidt med halen' og flyve videre.

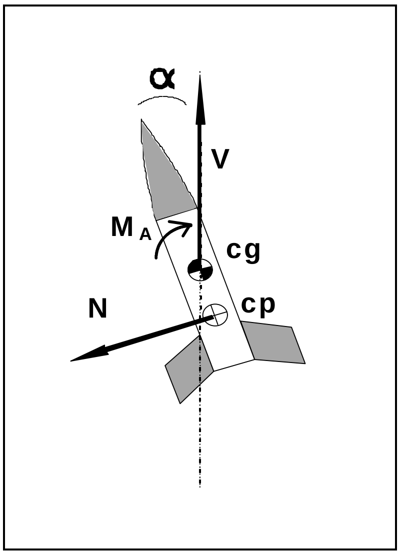
Den påvirkning, som slår raketten lidt ud af kurs vil typisk stamme fra vinden.

De 3 muligheder er illustreret på figuren nedenfor.

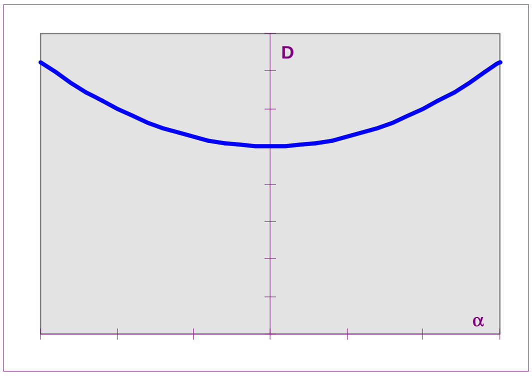


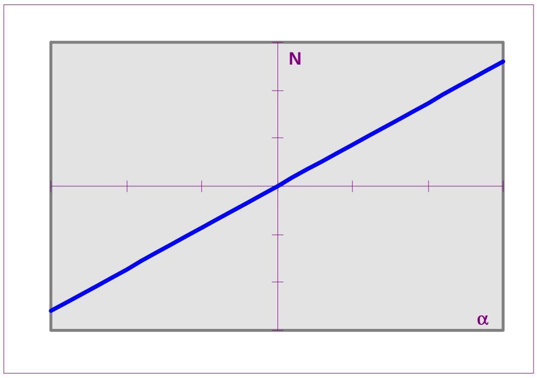
Angrebsvinklen

Hvis raketten undervejs i sin bane bliver slået lidt ud af kurs, vil dens centerakse ikke længere pege direkte i banens retning. Vinklen α mellem rakettens centerakse og banens retning kaldes angrebsvinklen. Angrebsvinklen har direkte indflydelse på størrelsen af de aerodynamiske kræfter. Ved store angrebsvinkler skelner man iøvrigt mellem lift og normalkræfter, idet liftet regnes vinkelret på banen og normalkraften vinkelret på rakettens centerakse. Tilsvarende skelner man mellem drag og aksialkraft, idet man regner drag parallelt med banen og aksialkraften parallel med centeraksen. Da raketter normalt flyver med små angrebsvinkler (den strukturelle last ved store angrebsvinkler vil få raketten til at knække), tillader vi os at lade lift og normalkraft være ens.



Både N og D afhænger mærkbart af α. For en normalt udformet raket har D minimum ved $\alpha = 0$, og vokser så med kvadratet på α ($\alpha < \pm \sim 15^{o}$). N er 0 når α er 0, og afhænger iøvrigt lineært af α ($\alpha < \pm \sim 15^{o}$). På et fly, vil vingen typisk være anbragt, så den har en betydelig angrebsvinkel når flyet som helhed flyver ved 0 angrebsvinkel. Det betyder at N stadig afhænger lineært med angrebsvinklen, men at nulpunktet forskydes til en passende negativ angrebsvinkel.





Størrelsen af de aerodynamiske afhænger af rakettens hastighed V, luftens densitet ρ og af angrebsvinklen α og udtrykkes ved hjælp af Rayleigh's formel:

$$D = \tfrac{1}{2} A r\, V^2 C_D(a) = q \cdot C_D(a)$$

$$N = \tfrac{1}{2} A \rho V^2 C_N(\alpha) = q \cdot C_N(\alpha)$$

Hvor A er et referenceareal (efter eget valg) og $C_N(\alpha)$ (*normalkoefficienten*) og $C_D(\alpha)$ (dragkoefficienten) er dimensionsløse størrelser som bestemmes eksperimentelt. Som referenceareal vælges det som regel at benytte næsekeglens baseareal.

Stabilitetsanalyse

Ved små angrebsvinkler antager man at normalkoefficienten afhænger lineært af angrebsvinklen:

$$C_N(\alpha) \approx \left. \frac{\partial C_N}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = 0} \cdot \alpha = c_{n\alpha} \cdot \alpha$$

Der findes ikke noget godt dansk navn for den nye koefficient $c_{n\alpha}$, men på udenlandsk kaldes den for 'lift curve slope coefficient'.

hvorefter vi kan skrive momentligningen:

$$M_A = q\alpha \cdot c_{n\alpha}\left(X_{cp} - X_{cg}\right)$$

For at bestemme $c_{n\alpha}$ og X_{cp} benyttes komponentmetoden, hvor raketten antages at bestå af et antal standardkomponenter, dvs. næsekegle, finner, cylindriske sektioner og koniske overgange. Man antager at de aerodynamiske kræfter der virker på den samlede raket kan skrives som summen af de kræfter der virker på de enkelte sektioner. Det passer imidlertid ikke helt, hvorfor man yderligere opererer med nogle interferensfaktorer. Data for $c_{n\alpha}$ og X_{cp} (og c_d) for de enkelte standardkomponenter kan findes i litteraturen.

Med udgangspunkt i komponentmetoden skriver man de samlede aerodynamiske kræfter på raketten som summen af kræfterne på de enkelte sektioner, kompenseret for interferens - og man skriver det samlede moment som de aerodynamiske kræfter giver anledning til som summen af de momenter der virker på de enkelte sektioner, igen under hensyntagen til interferens.

Ved opskrivning af det aerodynamiske moment kan man frit vælge sit referencepunkt. Vi vælger at opskrive momentet omkring spidsen af næsekeglen:

$$q\alpha \cdot c_{n\alpha} \cdot X_{cp} = q\alpha (c_{n\alpha})_n \cdot (X_{cp})_n + q\alpha (c_{n\alpha})_{bt} \cdot (X_{cp})_{bt} + q\alpha (c_{n\alpha})_{ct} (X_{cp})_{ct} + q\alpha (c_{n\alpha})_{fb} \cdot (X_{cp})_{fb}$$

hvor betydningen af index er som følger:

n : Nose
bt : Body Tube
ct : Conical Transition
fb : Finn/body

Har man flere komponenter eksempelvis et ekstra sæt finner, adderes disse bare til udtrykket ovenfor.

Vi antager, at raketten er lige, og at den ikke roterer om sit tyngdepunkt (statisk analyse). Hermed har alle dele af raketten samme angrebsvinkel og samme hastighed - q og α er ens for alle komponenterne. Ifølge komponentmetoden skrives den totale normalkraft som sommen af de enkelte normalkræfter, altså:

$$c_{n\alpha} = (c_{n\alpha})_n + (c_{n\alpha})_{bt} + (c_{n\alpha})_{ct} + (c_{n\alpha})_{fb}$$

Benyttes dette i momentbalanceligningen finder man:

$$X_{cp} = \frac{(c_{n\alpha})_n \cdot (X_{cp})_n + (c_{n\alpha})_{bt} \cdot (X_{cp})_{bt} + (c_{n\alpha})_{ct} \cdot (X_{cp})_{ct} + (c_{n\alpha})_{fb} \cdot (X_{cp})_{fb}}{(c_{n\alpha})_n + (c_{n\alpha})_{bt} + (c_{n\alpha})_{ct} + (c_{n\alpha})_{fb}}$$

Dette udtryk gælder i princippet ved alle hastigheder og for alle de konfigurationer, hvor komponentmetoden gælder, dvs. man skal med rimelighed kunne inddele sin raket i standardkomponenter. Imidlertid vil man opdage, at den enkelte $c_{n\alpha}$'er og X_{cp}'er afhænger på kompliceret vis af hastigheden - primært af machtallet, dvs. hastigheden divideret med lydens hastighed. Ved lave hastigheder, dvs op til ca. 180m/s, findes der imidlertid et sæt 'høkerformler', som angiver $c_{n\alpha}$ og X_{cp} for standardkomponenterne, og som gør det enkelt at bestemme X_{cp} for en 'almindelig' raket. Formlerne, som tilskrives J. Barrowman findes i appendix. Da $(c_{n\alpha})_{fb}$ normalt er væsentligt større end de øvrige komponenters $c_{n\alpha}$'er, vil X_{cp} almindeligvis være 'i nærheden' af finnerne. Koniske overgange der indsnævrer diameteren - de såkaldte boat-tails har en negativ værdi for $c_{n\alpha}$, og da disse i reglen placeres i rakettens agterende for at reducere luftmodstanden, vil de have en særdeles dårlig indflydelse på rakettens stabilitetsegenskaber.

Det bemærkes, at proceduren for at bestemme X_{cg} er helt analog med den ovenstående procedure. Også her inddeler man raketten i et antal passende komponenter, hvis vægt og tyngdepunkt bestemmes hver for sig. Benytter man samme inddeling som ved de aerodynamiske kræfter fås:

$$X_{cg} = \frac{(M)_n \cdot (X_{cg})_n + (M)_{bt} \cdot (X_{cg})_{bt} + (M)_{ct} \cdot (X_{cg})_{ct} + (M)_f \cdot (X_{cg})_f}{(M)_n + (M)_{bt} + (M)_{ct} + (M)_f}$$

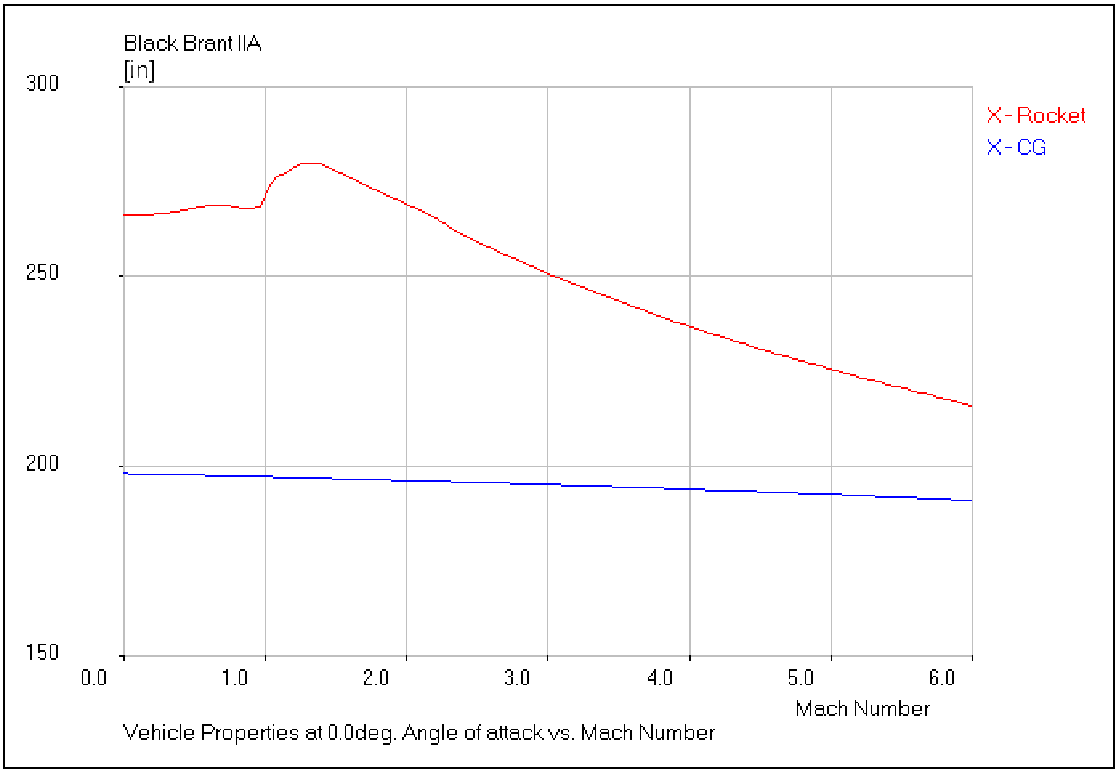
hvor M angiver den enkelte komponents masse.

Kendskabet til X_{cg} og X_{cp} gør det muligt at lave en statisk stabilitetsanalyse. I princippet er raketten stabil, hvis blot $X_{cp} > X_{cg}$ men i praksis må denne betingelse forlanges overholdt med en vis margin. Ofte opererer man med den 'statiske margin':

$$SM = \frac{X_{cp} - X_{cg}}{d}$$

som stabilitetsmål, med tommelfingerreglen, at $1 < SM < 2$ for en 'fornuftigt' designet raket. 'd' er rakettens diameter. Det ligger i denne vurdering, at hvis SM er for stor, vil raketten reagere meget hurtigt på forstyrrelser. En mere moderat SM vil give et mere 'harmonisk' baneforløb og lavere følsomhed for sidevind.

Når man laver sin stabilitetsanalyse skal man principielt undersøge forholdene under hele baneforløbet. Tyngdepunktet flytter sig når raketten accelererer, og hvis hastigheden overstiger 180m/s vil X_{cp} også flytte sig. Tyngdepunktet vil normalt bevæge sig mellem de positioner som det har i tilfældene med og uden brændstof. I nogle tilfælde kan tyngdepunktet dog flytte uden for dette interval når brændstoffet er delvist forbrugt. Bevægelsen af X_{cp} er væsentlig sværere at bestemme, men i reglen vil X_{cp} vandre bagud cirka indtil lydens hastighed nås, hvorefter det igen vandrer fremad, så det ved ca. 2 gange lydens hastighed igen når den position som beregnes med Barrowman's formler. Det betyder, at en raket der er stabil ved lave hastigheder i reglen vil være stabil ved hastigheder op til ca. 2 Mach. Hvis finnerne imidlertid bliver for tykke, kan man dog løbe ind i stabilitetsproblemmer allerede ved ca. 0.8 Mach !! Nedenfor er vist for løbet af X_{cp} og X_{cg} for sonderaketten Black Brant IIA, som er rimeligt repræsentativt for en 'almindelig' raket.



Dynamisk stabilitet

Ved en dynamisk stabilitetsundersøgelse må rakettens bevægelse medregnes, idet dens tyngdepunkt vil følge en ballistisk bane, hvorimod resten af raketten vil dreje sig omkring tyngdepunktet. De enkelte dele af raketten vil få induceret en hastighedskomposant fra drejebevægelsen, hvis størrelse afhænger af den enkelte dels afstand fra tyngdepunktet og vinkelhastigheden i drejebevægelsen. I middel vil alle rakettens dele naturligvis have den samme hastighed, men ud fra en øjebliksbetragtning vil rakettens dele have lokalt varierende hastighedsvektorer - og dermed angrebsvinkler. For flyvinger og raketfinner gælder, at hvis angrebsvinklen bliver tilstrækkeligt stor bliver $c_{N\alpha}$ negativ (stall). For en raket med 2 sæt finner, hvoraf det ene sæt befinder sig langt fra tyngdepunktet, vil en stor vinkelhastighed ved en ellers relativt lav hastighed kunne bringe stabiliteten i fare, selvom raketten er statisk stabil ved den aktuelle angrebsvinkel. For at lave en dynamisk stabilitetsundersøgelse skal man således undersøge positionen af luftens angrebspunkt ved alle hastigheder, alle angrebsvinkler og alle vinkelhastigheder, hvilket selvsagt er en omfattende affære.

Luftmodstand

Ved bestemmelse af luftmodstanden går man principielt frem på samme måde som ved normalkraftbestemmelsen, dog opererer man med nogle lidt andre komponenter. Der gælder som tidligere nævnt for små værdier af α at:

$$D = \tfrac{1}{2} A \rho V^2 C_D(\alpha) \approx \tfrac{1}{2} A \rho V^2 c_d$$

Man antager at drag koefficienten c_d kan skrives som summen af en række bidrag. Størrelsen af de forskellige bidrag afhænger kraftigt af hastigheden, idet nogle af bidragene kun er relevante ved hastigheder mindre end lydens, mens andre kun er relevante ved overlydshastigheder. I denne sammenhæng begrænser vi os til hastigheder under ca. 200m/s.

Den subsoniske drag koefficient opfattes ifølge komponentmetoden som summen af de enkelte komponenters bidrag og et eller flere interferensled. Interferensen viser sig primært at opstå når en raketkrop forsynes med finner. Vi skriver i første omgang:

$$c_d = (c_d)_{body} + (c_d)_f$$

Når luften strømmer forbi raketten opstår der dels et overtryk foran raketten og dels et undertryk bag raketten. Desuden gælder der, at dannes et såkaldt grænselag omkring raketten. Grænselaget er en hinde af luft, hvor luftmolekylernes hastighed varierer fra 0 (i forhold til raketten) ved selve rakettens overflade til rakettens fulde hastighed i grænselagets udkant. Alle disse tre effekter bidrager til den samlede luftmodstand:

$$(c_d)_{body} = (c_d)_{friction} + (c_d)_{base} + (c_d)_{pressure}$$

For 'normale' raketter med relativt spidse næsekegler og koniske overgange kan overtryks bidraget korreleres med overfladefriktionen. Undertryksbidraget fra basen kan approximeres med et led der afhænger af machtallet (v/v_{lyd} : v_{lyd} = 340m/s):

$$(c_d)_{body} = R_{fb} \cdot C_f \left[1 + \frac{60}{\left[l_b/d_{\max}\right]^3} + 0.0025\left(\frac{l_b}{d_{\max}}\right)\right]\frac{S_{tot}}{0.25\pi d^2} + \left(21.59 + 4.47754\frac{v}{v_{lyd}} - 21.173\left[\frac{v}{v_{lyd}}\right]^2\right)^{-1}\left[\frac{d_{base}}{d}\right]^2$$

Hvor C_f er overfladefriktionskoefficienten, l_b er raketkroppens længde, d_{max} er raketkroppens maksimale diameter, d_{base} er diameteren af rakettens base, d er næsekeglens roddiameter, v er rakettens hastighed og S_{tot} er overfladearealet for den samlede raketkrop bortset fra basen. R_{fb} er en interferens faktor - se senere.

Til bestemelse af overfladefriktionskoefficienten beregnes Reynoldstallet:

$$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot l_b \cdot \rho}{\mu}$$

hvor ρ er luftens densitet (1.2kg/m^3) og μ er den dynamiske viskositet 1.6899*10^{-5} (kg/(ms)). Overfladefriktionskoefficienten beregnes ved Blasius formel for laminart flow (Re < 5*10^5) og med von Schlichtings formel ved turbulent flow:

$$C_f = \begin{cases} \dfrac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}}} & \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^5 \\ \dfrac{0.455}{\log(\mathrm{Re})^{2.58}} - \dfrac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}}} & \mathrm{Re} \geq 5 \cdot 10^5 \end{cases}$$

I princippet skal der også tages hensyn til overfladerughed ved beregning af C_f. Da overfladerugheden imidlertid normalt først får betydning ved relativt store Reynoldstal antages det her, at overfladen er helt glat.

Betragtningerne omkring raketkroppens luftmodstand gælder tilsvarende for tynde tilbagestrøgne finner:

$$(c_d)_f = R_{fb} \cdot C_{f,f}\left[1 + 2.4\frac{t}{c} + 100\left(\frac{t}{c}\right)^2\right]\frac{S_{finn}}{0.25\pi d^2}$$

hvor t/c er finnens gennemsnitlige tykkelsesforhold, S_{finn} er finnernes totale overflade (altså begge sider) og $C_{f,f}$ er overfladefriktionskoefficienten som basere på finnernes Reynoldstal:

$$\mathrm{Re}_f = \frac{v \cdot l_f \cdot \mathrm{r}}{\mathrm{m}}$$

hvor l_f er den 'gennemsnitlige højde' af finnerne. Strømningen omkring finnerne antages at være turbulent ved alle hastigheder:

$$C_{f,f} = \frac{0.455}{\log(\mathrm{Re})^{2.58}}$$

Bliver finnerne for tykke, eller hvis de har stump for- eller bagkant, gælder udtrykket for $(c_d)_f$ ikke længere.

Når luftmodstanden for den samlede raket beregnes skal der tages hensyn til interferensen mellem finner og raketkrop. Denne interferens approximeres med en fast forøgelse af den samlede overfladefriktion og overtryksmodstand: R_{fb}=1.015.

Sålænge raketmotoren er tændt, vil udstødningsgasserne ekspandere til omgivelsestryk, og dermed fylde det vakuum, som ellers opstår bag basen. Luftmodstandsbidraget fra basen vil derfor afhænge af, om motoren er tændt eller ej. I den drevne fase, skal man derfor i formlen for $(c_d)_{body}$ benytte den *ækvivalente* basediameter, som findes ved at fratrække dysens exitareal fra rakettens baseareal, og omregne til ækvivalent diameter.

APPENDIX A: Barrowmans formler

En blandt amatører og semiproffesionelle raketbyggere meget udbredt - næsten enerådende - metode for stabilitetsanalyse er udviklet af J. Barrowman for *Century Engineering Company* til glæde for modelraketfolket. Metoden udmærker sig ved både at være meget generel, og samtidigt så simpel at den kan bruges af en gymnasielev med regnestok. Der tages dog visse forbehold for anvendelsesområdet:

1. Angrebsvinklen er lille, dvs. $\alpha <$ ca. 10^{O}
2. Rakettens hastighed er mindre end 180 m/s.
3. Luftens strømning omkring raketten skal være jævn og må ikke pludselig ændre retning.
4. Rakettens længde skal være væsentligt større end dens største diameter.
5. Formen på raketten må ikke være abrupt, og den skal ende i et punkt.
6. Raketten skal være symmetrisk omkring længdeaksen.
7. Raketten skal være uelastisk.
8. Finnerne skal være lavet af 'tynde' plader.

Barrowman betragter de komponenter, som en typisk raket kan tænkes at bestå af, nemlig næsekegle, finner, koniske overgange og - omend kun indirekte - cylindriske sektioner. Forudsætningerne 3, 5 og 6 sikrer, at man med rimelighed kan slutte sig til den samlede rakets aerodynamiske egenskaber på baggrund af komponentegenskaberne.

Næsekeglen

For en næsekegle med længde L_n og volumen V_n gælder:

$$\left(c_{n\alpha}\right)_n = 2 \qquad \text{og} \qquad (X_{cp})_n = L_n - \frac{V_n}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

For de mest benyttede typer af næsekeglen finder man følgende værdier for X_n:

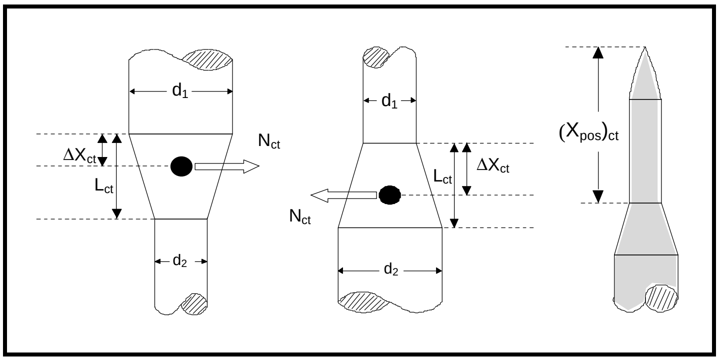
Konisk næsekegle	Tangent Ogive næsekegle	Parabolsk næsekegle
$(X_{cp})_n = 2/3\ L_n$	$(X_{cp})_n = 0.466\ L_n$	$(X_{cp})_n = 1/2\ L_n$

Cylindriske sektioner

For en cylindrisk sektion gælder at $\left(c_{n\alpha}\right)_{bt} = 0$, og at den dermed udgår af den samlede stabilitetsberegning.

Strengt taget er dette ikke helt korrekt, og strengt taget er udtrykket for næsekeglen heller ikke korrekt. Udtrykket for næsekeglen gælder nemlig i virkeligheden for en næsekegle med cylindrisk bagkrop - dvs. udtrykket for næsekeglen tager også hensyn til interferens med den efterfølgende cylindriske del.

Koniske overgange



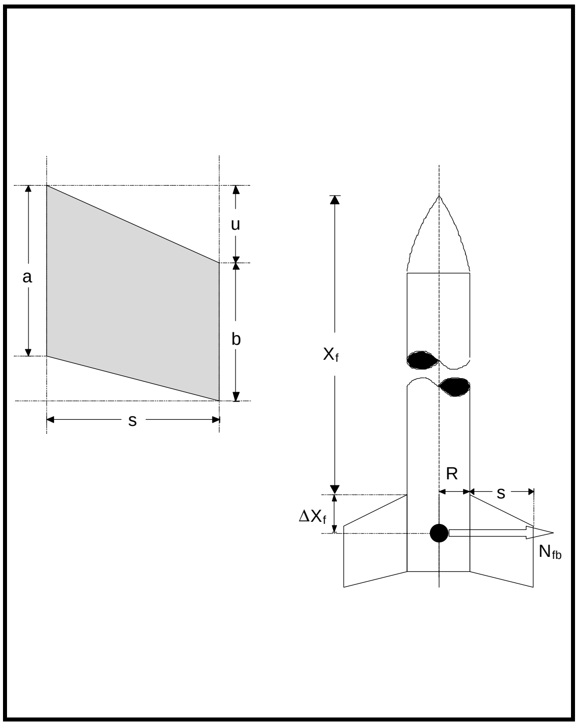
For en konisk overgang med længden l_{ct}, frontdiameteren d_1 og agterdiameteren d_2 gælder følgende udtryk:

$$\left(c_{n\alpha}\right)_{ct} = 2\cdot\left[\left(\frac{d_2}{d}\right)^2 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right] \text{ og } (X_{cp})_{ct} = (X_{pos})_{ct} + \frac{L_{ct}}{3}\left[1 + \frac{1 - \frac{d_1}{d_2}}{1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2}\right]$$

Bemærk at udtrykket for $(c_{n\alpha})_{ct}$ skifter fortegn, hvis $d_1 > d_2$.

Finner

For finnerne defineres de mekaniske mål som angivet på figuren:



Ved beregning af finnernes bidrag skal der specifikt tages hensyn til interferens mellem finnerne og raketkroppen. Man skriver udtrykket på følgende måde:

$$(c_{n\alpha})_{fb} = K_{fb}\cdot(c_{n\alpha})_f$$

hvor index fb står for 'finn in prescence of body', mens index f angiver 'finn alone'. Igen negligeres et bidrag fra raketkroppen som skyldes at den del af raketkroppen som sidder mellem finnerne 'kommer til at virke som en finne'. Dette led er imidlertid ikke så stort, så det har Barrowman valgt at udelade.

For finnerne alene angiver benyttes det følgende udtryk:

$$\left(c_{n\alpha}\right)_f = \frac{4n\cdot\left(\frac{s}{d}\right)^2}{1+\sqrt{1+\left(\frac{2\lambda}{a+b}\right)^2}}$$

$$\lambda^2 = s^2 + \left(u + ½(b - a)\right)^2$$

Størrelsen af interferensfaktoren afhænger af hvor mange finner der sidder i den enkelte finnesektion:

$K_{fb} = 1 + \frac{R}{S + R}$ for 3 eller 4 finner og $K_{fb} = 1 + \frac{0.5 \cdot R}{S + R}$ for 6 finner pr. finnesektion.

Positionen af $(X_{cp})_{fb}$ viser sig at være uafhængig af interferens med raketkroppen:

$$(X_{cp})_{fb} = (X_{cp})_f = (X_{pos})_f + \frac{u(a + 2b)}{3(a + b)} + \frac{1}{6}\left(a + b - \frac{ab}{a + b}\right)$$

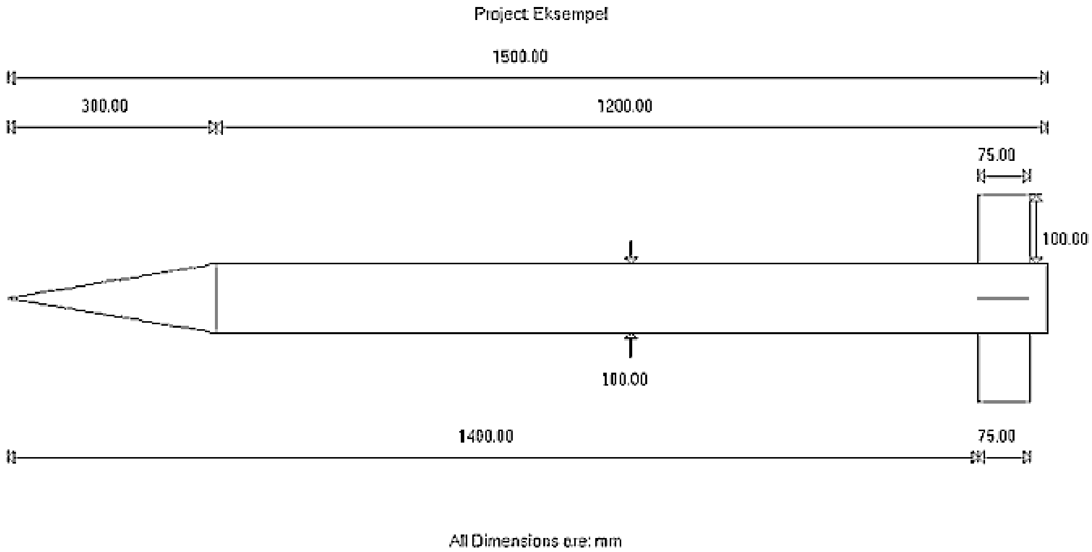
Nu er alle størrelser til rådighed, hvormed man kan beregne den samlede position af X_{cp} for hele raketten:

$$X_{cp} = \frac{(c_{n\alpha})_n \cdot (X_{cp})_n + (c_{n\alpha})_{ct} \cdot (X_{cp})_{ct} + (c_{n\alpha})_{fb} \cdot (X_{cp})_{fb}}{(c_{n\alpha})_n + (c_{n\alpha})_{ct} + (c_{n\alpha})_{fb}}$$

Hvis man har mere en et sæt finner eller mere end én konisk overgang, så tilføjes de blot som ekstra led til formlen.

APPENDIX B: Et eksempel

Den nedenstående figur viser en simpel raketkonfiguration med realistiske DARK mål.



Af tegningen finder man de relevante dimensioner:

$L_n = 300$ $a = 75$ $u = 0$ $n = 4$

$d = 100$ $b = 75$ $s = 100$ $R = 50$

Barrowman's metode giver følgende:

	$(c_{n\alpha})$ [*pr. radian*]	(X_{cp}) [mm]
Næsekegle	$(c_{n\alpha})_n = \underline{2}$	$(X_{cp})_n = 2/3 *300 = \underline{200}$
Koniske overgange	-	-
Finner	$l = 100$ $K_{fb} = 1.333$ $(c_{n\alpha})_f = 6.0$ $(c_{n\alpha})_{fb} = \underline{7.998}$	$(X_{cp})_{fb} = (X_{pos})_f + 18.75$ $= 1400 + 18.75 = \underline{1418.75}$
Samlet raket	$(c_{n\alpha}) = (c_{n\alpha})_n + (c_{n\alpha})_{fb}$ $= 2 + 7.998 = \underline{9.998}$	$(X_{cp}) = (2*200 + 1418.75*7.998)/9.998$ $= \underline{1175}$

For beregning af luftmodstanden gøres yderligere nogle antagelser:

1. Rakettens hastighed sættes til 150m/s, lydens hastighed sættes til 340m/s
2. Dysens exitdiameter sættes til 60mm
3. Finnernes tykkelse sættes til 3.75mm svarende til t/c = 0.05

Af dette, og af figuren ovenfor fås følgende supplerende mål:

$l_b = 1.5$ m $d = 0.1$ m $d_{max} = 0.1$

$d_{base} = 0.1$ (motor ikke tændt)

Først beregnes følgende størrelser:
Effektiv basediameter med tændt motor:
d_{base} = 2*sqrt(0.25*0.1^2 - 0.25*0.06^2) = 0.08m (motor tændt)
Raketkroppens samlede overflade (basen fraregnet), raketkroppens Reynoldstal og friktionskoefficient:
$S_{tot} = \pi*(1.5-0.3)*0.1+0.5*\pi*0.1*sqrt(0.3^2+0.05^2) = \underline{0.428m^2}$
$Re = 150*1.5*1.2/1.6899*10^{-5} = \underline{15.98*10^6}$
$C_f = 0.455/7.2^{2.58} - 1.328/3997 = \underline{2.457*10^{-3}}$

Heraf findes:
Luftmodstandskoefficient for raketkrop med motor slukket:
$(c_d)_{body} = 1.015*2.457*10^{-3}*(1+0.0178+0.0375)*54.49+1/(21.59+1.97-4.12)$
$= 0.1434 + 0.0514 = \underline{0.1948}$.

Luftmodstandskoefficient for raketkrop med tændt motor:
$(c_d)_{body} = 0.1434 + 0.0514*0.64 = \underline{0.1763}$.

For finnerne findes Reynoldstal, friktionskoefficient og luftmodstandskoefficient:
$Re_f = 150*0.075*1.2/1.6899*10^{-5} = 7.99*10^5$
$C_{f,f} = 0.455/(5.9^{2.58}) = 4.67*10^{-3}$
$(c_d)_f = 1.015*4.67*10^{-3}*(1 + 0.12 + 0.25)*2*4*0.1*0.075/7.854*10^{-3}$
$= \underline{0.0496.}$

Det bemærkes at de ovenstående udregninger indregner interferens mellem raketkroppen og finnerne. Derfor kan den samlede luftmodstandskoefficient bestemmes som summen af de før fundne koefficienter. Det giver følgende resultater:
$(c_d)_{raket} = 0.1948 +0.0496 = \underline{0.244}$ (motor slukket).
og
$(c_d)_{raket} = \underline{0.226}$ (motor tændt).