Beregning af angrebspunktet for luftens kræfter for henholdsvis en konisk, parabolsk, elliptisk og tangent ogive spids

Jørgen Franck

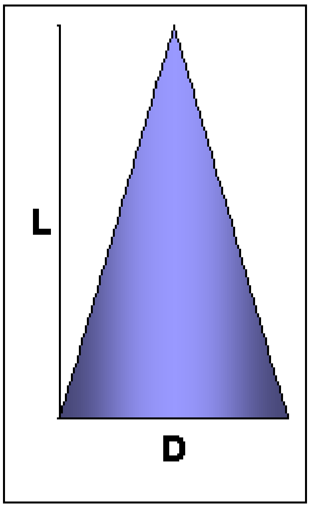
Til beregning af angrebspunktet for luftens kræfter på raketspidser for slanke subsoniske raketter ved små angrebsvinkler anvendes formlen

$$\overline{X}_n = L - \frac{V}{A}$$

hvor

L	Raketspidsens samlede længde
V	Raketspidsens samlede volumen
A	Raketspidsens grundfladeareal.
$\overline{X}_n$	Angrebspunktets placering regnet fra rakettens spids.

Konisk spids



Ligningen for en konisk spids med længden L og diameteren D er

$$y = -\frac{2L}{D}x + L \Rightarrow$$

$$x = \frac{D}{2L}(L - y)$$

Volumen kan nu beregnes udfra

$$V = \pi \int_0^L x^2 dy \Rightarrow$$

$$V = \pi \int_0^L \frac{D^2}{4L^2} (L-y)^2 dy \Rightarrow$$

$$V = \frac{A}{L^2} \int_0^L (y^2 - 2Ly + L^2) dy \Rightarrow$$

$$V = \frac{A}{L^2} \left[\frac{1}{3} y^3 - 2L \frac{1}{2} y^2 + L^2 y \right]_0^L \Rightarrow$$

$$V = \frac{A}{L^2} \left(\frac{1}{3} L^3 - L^3 + L^3 \right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{3} LA$$

Udtrykket for volumen kan nu indsættes i formlen for angrebspunktet for luftens kræfter regnet fra spidsen, hvilket giver

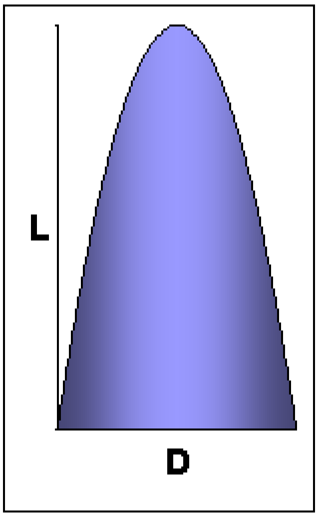
$$\overline{X}_n = L - \frac{V}{A} \Rightarrow$$

$$\overline{X}_n = L - \frac{LA}{3A} \Rightarrow$$

$$\overline{X}_n = \frac{2}{3} L$$

Det bemærkes, at angrebspunktet for luftens kræfter for en konisk spids er uafhængig af dennes diameter.

Parabolsk spids



Ligningen for en parabolsk spids med længden L og diameteren D er

$$y = -\frac{4L}{D^2}x^2 + L \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{D^2}{4L}(L - y)$$

Volumen kan nu beregnes udfra

$$V = \pi \int_0^L x^2 dy \Rightarrow$$

$$V = \pi \int_0^L \frac{D^2}{4L}(L - y) dy \Rightarrow$$

$$V = \frac{A}{L} \int_0^L (L - y) dy \Rightarrow$$

$$V = \frac{A}{L}\left[Ly - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^L \Rightarrow$$

$$V = \frac{A}{L}\left(L^2 - \frac{1}{2}L^2 \right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{2}LA$$

Udtrykket for volumen kan nu indsættes i formlen for angrebspunktet for luftens kræfter regnet fra spidsen, hvilket giver

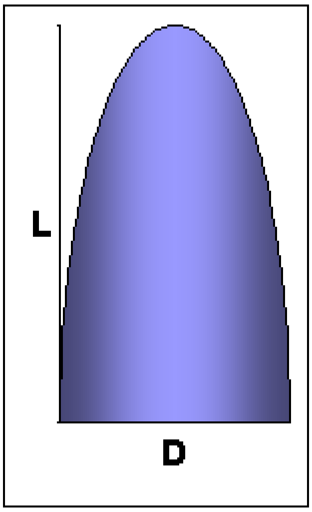
$$\overline{X}_n = L - \frac{V}{A} \Rightarrow$$

$$\overline{X}_n = L - \frac{LA}{2A} \Rightarrow$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{2}L$$

Det bemærkes, at angrebspunktet for luftens kræfter for en parabolsk spids er uafhængig af dennes diameter.

Elliptisk spids



Ligningen for en elliptisk spids med længden *L* og diameteren *D* er

$$\left(\frac{2x}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{D^2}{4}\left(1 - \left(\frac{y}{L}\right)^2\right)$$

Volumen kan nu beregnes udfra

$$V = \pi \int_0^L x^2 dy \Rightarrow$$

$$V = \pi \int_0^L \frac{D^2}{4}\left(1 - \left(\frac{y}{L}\right)^2\right) dy \Rightarrow$$

$$V = A \int_0^L \left(1 - \left(\frac{y}{L}\right)^2\right) dy \Rightarrow$$

$$V = A\left[y - \frac{1}{3}\frac{y^3}{L^2}\right]_0^L \Rightarrow$$

$$V = A\left(L - \frac{1}{3}\frac{L^3}{L^2}\right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{2}{3}LA$$

Udtrykket for volumen kan nu indsættes i formlen for angrebspunktet for luftens kræfter regnet fra spidsen, hvilket giver

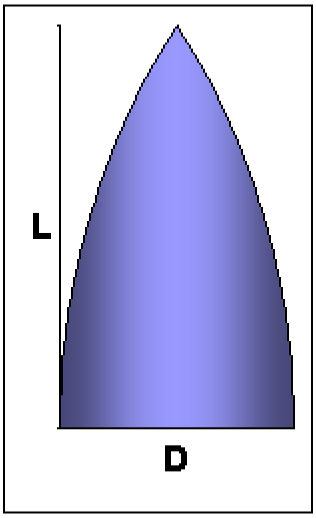
$$\overline{X}_n = L - \frac{V}{A} \Rightarrow$$

$$\overline{X}_n = L - \frac{2LA}{3A} \Rightarrow$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{3}L$$

Det bemærkes, at angrebspunktet for luftens kræfter for en elliptisk spids er uafhængig af dennes diameter.

Tangent ogive spids



Ligningen for en tangent ogive spids med længden L og diameteren D er

$$y^2 + (x - \gamma)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$x = \gamma + \sqrt{R^2 - y^2}$$

hvor

$$\gamma = \frac{D}{2} - R$$

$$R = \frac{D}{4} + \frac{L^2}{D}$$

Volumen kan nu beregnes udfra

$$V = \pi \int_0^L x^2 dy \Rightarrow$$

$$V = \pi \int_0^L \left(\gamma + \sqrt{R^2 - y^2}\right)^2 dy$$

Løsningen på integralet kan findes i reference [1] og er følgende

$$V = \pi R^3 \left(\lambda \left(1 + \mu^2 - \frac{\lambda^2}{3} - \mu\sqrt{1-\lambda^2} \right) - \mu \operatorname{Arcsin} \lambda \right)$$

hvor

$$\mu = 1 - \frac{D}{2R}$$

$$\lambda = \frac{L}{R}$$

Af hensyn til beregningen af angrebspunktet for luftens kræfter omskrives udtrykket for volumen ved anvendelse af den dimensionsløse størrelse

$$\alpha = \frac{L}{D}$$

Vi får herved

$$\lambda = \frac{L}{R} = \frac{L}{\frac{D}{4} + \frac{L^2}{D}} = \frac{\frac{L}{D}}{\frac{1}{4} + \left(\frac{L}{D}\right)^2} = \frac{\alpha}{\frac{1}{4} + \alpha^2}$$

$$\mu = 1 - \frac{D}{2R} = 1 - \frac{D}{2\left(\frac{D}{4} + \frac{L^2}{D}\right)} = 1 - \frac{1}{2\left(\frac{1}{4} + \left(\frac{L}{D}\right)^2\right)} = 1 - \frac{1}{2\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right)}$$

$$R^3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{L^2}{D}\right)^3 = \left(D\left(\frac{1}{4} + \left(\frac{L}{D}\right)^2\right)\right)^3 = D^3\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right)^3$$

Udtrykket for volumen kan nu indsættes i formlen for angrebspunktet for luftens kræfter regnet fra spidsen, hvilket giver

$$\overline{X}_n = L - \frac{V}{A} \Rightarrow$$

$$\overline{X}_n = L - \frac{\pi R^3 \left(\lambda\left(1 + \mu^2 - \frac{\lambda^2}{3} - \mu\sqrt{1-\lambda^2}\right) - \mu \text{ Arcsin } \lambda\right)}{A} \Rightarrow$$

$$\overline{X}_n = L - \frac{4AD\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right)^3 \left(\lambda\left(1 + \mu^2 - \frac{\lambda^2}{3} - \mu\sqrt{1-\lambda^2}\right) - \mu \text{ Arcsin } \lambda\right)}{A} \Rightarrow$$

$$\overline{X}_n = L - 4D\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right)^3 \left(\lambda\left(1 + \mu^2 - \frac{\lambda^2}{3} - \mu\sqrt{1-\lambda^2}\right) - \mu \text{ Arcsin } \lambda\right)$$

Det bemærkes, at angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive spids er noget mere kompliceret end for henholdsvis en konisk, parabolsk og elliptisk spids. Desuden indgår både længden og diameteren i udtrykket for angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive spids.
For en nærmere undersøgelse af variationen af angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive spids som funktion af ?, omskrives formlen på dimensionsløs form som følger

$$\frac{\overline{X}_n}{L} = 1 - \frac{4}{\alpha}\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right)^3 \left(\lambda\left(1 + \mu^2 - \frac{\lambda^2}{3} - \mu\sqrt{1-\lambda^2}\right) - \mu \text{ Arcsin } \lambda\right)$$

Det ene grænsetilfælde er hvor spidsen er en halvkugle, dvs. længden L er lig radius i halvkuglen:

$$\alpha = \frac{L}{D} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}D$$

Indsættes ovenstående værdi for ? i formlen for angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive spids, fås

$$\frac{\overline{X}_n}{L}(\alpha = ½) = 1 - \frac{4}{½}\left(\frac{1}{4} + (½)^2\right)^3 \left(1\left(1 + 0^2 - \frac{1^2}{3} - 0\sqrt{1-1^2}\right) - 0\text{Arcsin } 1\right) \Rightarrow$$

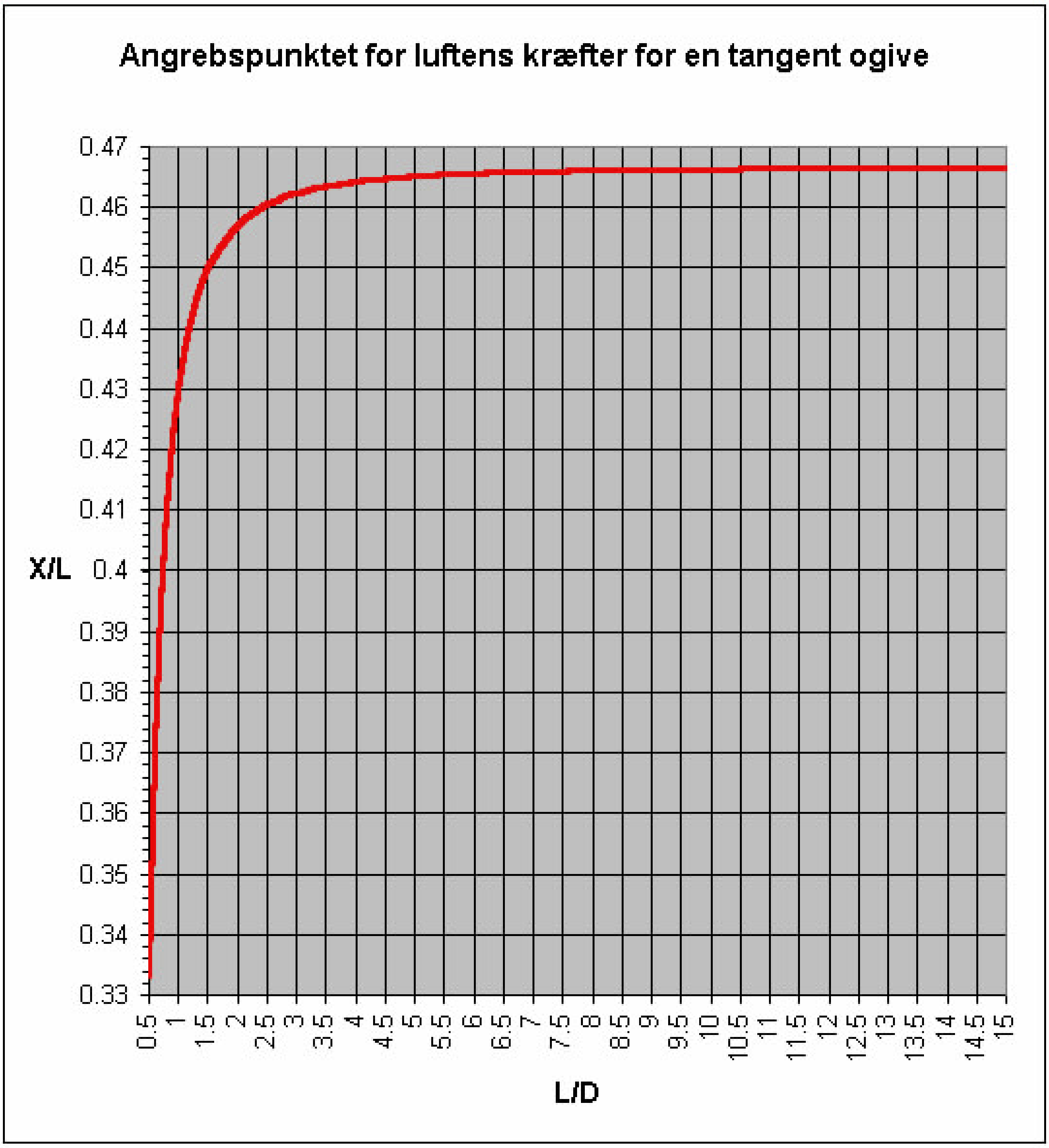
$$\overline{X}_n(\alpha = ½) = \frac{1}{3}L$$

Det bemærkes, at resultatet er det samme som det der gælder generelt for en elliptisk spids. Det andet grænsetilfælde er for ? gående mod uendelig. Umiddelbart ser det ikke ud som om formlen konvergerer, da begge led går mod uendelig i formlen. Det skal dog bemærkes, at det er differensen mellem to led der går mod uendelig for ? gående mod uendelig. Som tilnærmet værdi for angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive spids for ? gående mod uendelig kan benyttes

$$\overline{X}_n(\alpha \to \infty) \approx 0.466L$$

Ovennævnte approksimation benyttes blandt andet i reference [2], dog uden at der er

angivet nogle betingelser for approksimationens anvendelsesområde.
Af nedenstående figur ses den grafiske afbildning af angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive spids som funktion af ?. Det ses tydeligt, at for ? mindre end 2.5 begynder kurven at afvige fra approksimationen hvorfor den eksakte formel bør anvendes til beregning af angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive spids.



Referencer

1. Peter O. Nielsen og Jørgen Franck — Beregning af areal, volumen, massemidtpunkt og inertimomenter for en klasse af omdrejningslegemer med cirkelbuegeometri. Dansk Amatør Raket Klub.
2. Jim Barrowman — Calculating the center of pressure of a model rocket. Technical Information Report 33, 1970. Centuri Engineering Company.