Stabilitet - og Barrowman's metode

af

Hans Olaf Toft

De aerodynamiske kræfter, som virker på en raket kan inddeles i en aksial komposant, der virker i rakettens længderetning og i en normalkomposant, der virker vinkelret på rakettens længderetning. Så længe rakettens sigteretning er sammenfaldende med hastighedsvektoren er det kun aksialkomposanten der har betydning, men hvis rakettens sigteretning afviger med angrebsvinklen α - vil normalkomposanten give anledning til et moment omkring rakettens tyngdepunkt af størrelsen:

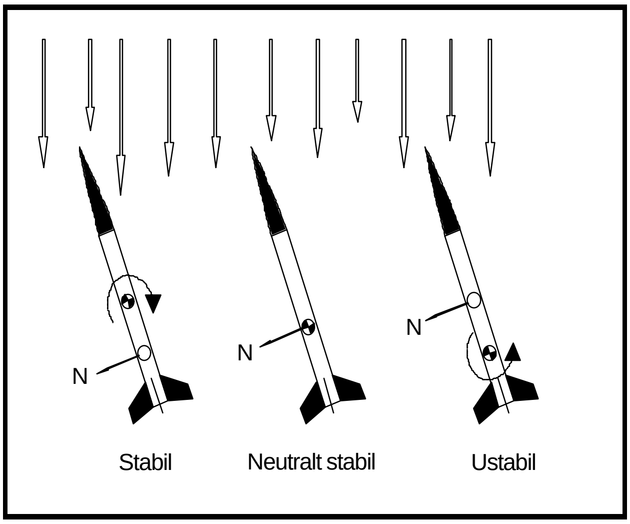
$$M_A = N \cdot \left(X_{cp} - X_{cg}\right)$$

hvor X_{cg} angiver afstanden fra et rakettens massemidtpunkt til et referencepunkt og X_{cp} angiver afstanden fra angrebspunktet for de aerodynamiske kræfter til samme referencepunkt (efter eget valg). N angiver størrelsen af den aksiale komposant af de aeroynamiske kræfter.

Som det ses regnes momentet med fortegn, hvilket afspejler de 3 mulige fysiske forhold, nemlig (regnet fra rakettens næse) at:

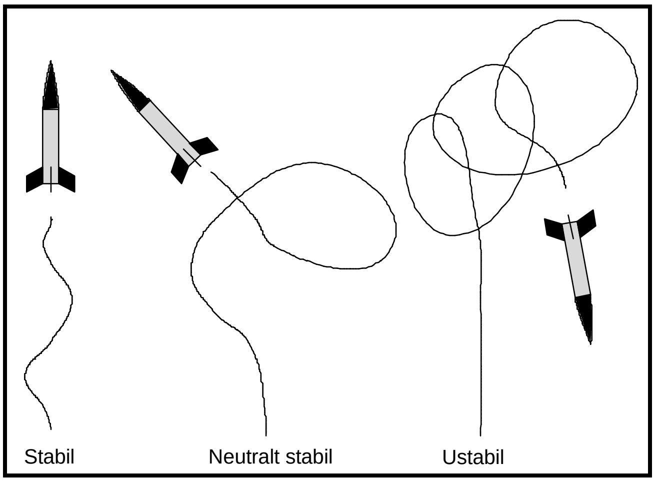
1. cp ligger bagved cg, hvilket betyder at det aerodynamiske moment modvirker angrebsvinklen. I dette tilfælde siges raketten at være *stabil*.
2. cp sammenfalder med cg. Det aerodynamiske moment er uafhængigt af angrbsvinklen, og raketten siges at være *neutralt stabil*.
3. cp ligger foran cg. Det aerodynamiske moment virker nu i samme retning som agrebsvnklen, og raketten siges at være *ustabil*.

De 3 muligheder er illustreret på figuren nedenfor.



Ud fra en kontrolteknisk synsvinkel er dette stabilitets-kriterie temmeligt primitivt, da man ikke kan slutte at en raket vil flyve 'pænt', blot fordi den er stabil. Imidlertid kan man uden videre drage den omvendte konklusion - at en raket der ikke er stabil *ikke* vil flyve 'pænt'.

Fra et rent sikkerhedsmæssigt synspunkt er den neutralt stabile raket den farligste, da man ikke har noge som helst kontrol på flyveretningen.



En stabilitets-undersøgelse vil derfor primært handle om at bestemme position for cp, mens en mere konstruktiv vurdering af rakettens flyveegenskaber kræver en nøjere undersøgelse af normalkræfternes størrelse, samt af rakettens inertimomenter.

Størrelsen af de aerodynamiske kræfter afhænger af rakettens hastighed V, luftens densitet ρ og af angrebsvinklen α. Således bliver normalkomposanten:

$$N = ½A\rho V^2 C_N(\alpha) = q \cdot C_N(\alpha)$$

Hvor A er et referenceareal (efter eget valg) og $C_N(\alpha)$ (*normalkoefficienten*) er en dimensionsløs størrelse som bestemmes eksperimentelt. Normalt varierer normalkoefficienten lineært med angrebsvinklen indtil en vis vinkel. For små vinkler kan man derfor benytte omskrivningen:

$$C_N(\alpha) \approx \left.\frac{\partial C_N}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha = c_{n\alpha} \cdot \alpha$$

hvorefter vi kan skrive momentligningen:

$$M_A = q\alpha \cdot c_{n\alpha}\left(X_{cp} - X_{cg}\right)$$

En blandt amatører og semiproffesionelle raketbyggere meget udbredt - næsten enerådende - metode for stabilitetsanalyse er udviklet af J. Barrowman for *Century Engineering Company* til glæde for modelraketfolket. Metoden udmærker sig ved både at være meget generel, og samtidigt så simpel at den kan bruges af en gymnasielev med regnestok. Der tages dog visse forbehold for anvendelsesområdet:

1. Angrebsvinklen er lille, dvs. α < ca. 10^O
2. Rakettens hastighed er mindre end 180 m/s.
3. Luftens strømning omkring raketten skal være jævn og må ikke pludselig ændre retning.
4. Rakettens længde skal være væsentligt større end dens største diameter.
5. Formen på raketten må ikke være abrupt, og den skal ende i et punkt.
6. Raketten skal være symmetrisk omkring længdeaksen.
7. Raketten skal være uelastisk.
8. Finnerne skal være lavet af 'tynde' plader.

Barrowman betragter de komponenter, som en typisk raket kan tænkes at bestå af, nemlig næsekegle, finner, koniske overgange og - omend kun indirekte - cylindriske sektioner. Forudsætningerne 3, 5 og 6 sikrer, at man med rimelighed kan slutte sig til den samlede rakets aerodynamiske egenskaber på baggrund af komponentegenskaberne.

Det samlede aerodynamiske moment omkring referencepunktet kan skrives som summen af de enkelte komponenters moment omkring samme referencepunkt. Barrowman har valgt at lægge referencepunktet ved spidsen af næsekeglen. Tilsvarende er den samlede normalkraft summen af de normalkræfter der virker på de enkelte sektioner. Med udgangspunkt i forbeholdene 1, 3 og 7 kan momentbalancen for en raket bestående af k sektioner skrives som:

$$q\alpha \cdot c_{n\alpha} \cdot X = q\alpha(c_{n\alpha})_1 \cdot X_1 + q\alpha(c_{n\alpha})_2 \cdot X_2 + \ldots + q\alpha(c_{n\alpha})_k \cdot X_k$$

da q og α er den samme for alle komponenterne og

$$c_{n\alpha} = (c_{n\alpha})_1 + (c_{n\alpha})_2 + \ldots + (c_{n\alpha})_k$$

kan det resulterende angrebspunkt skrives som:

$$\boxed{X = \frac{(c_{na})_1 \cdot X_1 + (c_{na})_2 \cdot X_2 + \ldots + (c_{na})_k \cdot X_k}{(c_{na})_1 + (c_{na})_2 + \ldots + (c_{na})_k}}$$

(indrammede formler svarer til de af Barrowman angivne)

Tilbage står nu 'blot' at bestemme de indgåede størrelser.

Næsekeglen

Barrowman benytter forudsætning 4 til at retfærdiggøre brugen af slender body theory, dvs. en forsimplet aerodynamisk teori, der beskriver forholdene for 'slanke' legemer. Denne teori benyttes ofte til at beskrive forholdene for et rotationssymmetrisk legeme, der ender i et punkt:

$$\boxed{(c_{n\alpha})_n = 2} \qquad \text{og} \qquad X_n = L_n - \frac{V_n}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

hvor L_n og V_n er næsekeglens længde hhv. volumen. Barrowman angiver X_n for 3 forskellige typer næsekegler:

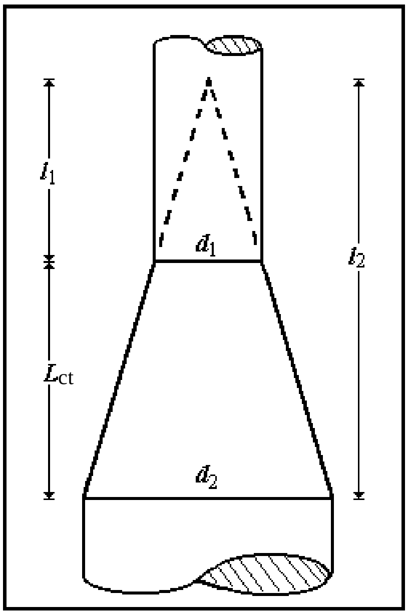
Konisk næsekegle	Tangent Ogive næsekegle	Parabolsk næsekegle
$X_n = 2/3\ L_n$	$X_n = 0.466\ L_n$	$X_n = 1/2\ L_n$

Som referenceareal for $c_{n\alpha}$ vælger Barrrowman at benytte næsekeglens baseareal, hvorfor alle de øvrige komponenter skal omregnes til dette areal.

Koniske overgange

Barrowman opfatter en konisk overgang som differensen mellem 2 koniske næsekegler: 'hovedkeglen' med længden l_2 og bunddiameteren d_2, samt en 'top' med længden l_1 og bunddiameteren d_1.

Der gælder da, at $c_{n\alpha}$ for den koniske overgang findes som $c_{n\alpha}$ for hovedkeglen minus $c_{n\alpha}$ for topkeglen:



$$\left(c_{na}\right)_{ct} = 2\left(\frac{4pd_2^{\ 2}}{4pd^2}\right) - 2\left(\frac{4pd_1^{\ 2}}{4pd^2}\right)$$

Index ct angiver 'conical transition', og d er 'rod' diameteren af næsekeglen.

Dette omskrives let til det udtryk Barrowman opgiver:

$$\boxed{\left(c_{n\alpha}\right)_{ct} = 2\cdot\left[\left(\frac{d_2}{d}\right)^2 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]}$$

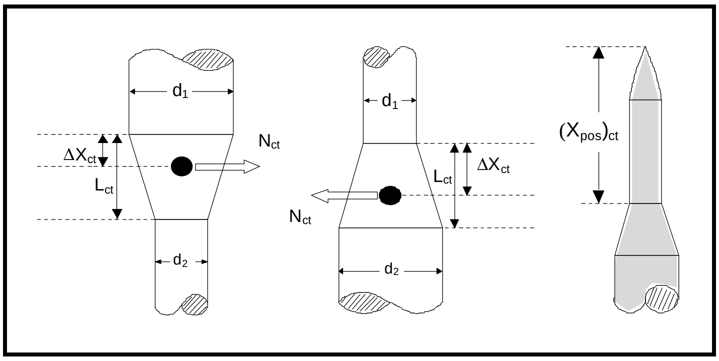
For at bestemme angrebspunktet for de aerodynamiske kræfter opskrives momentet *omkring forkanten af den koniske overgang* (X_n = 2/3 L_n for en konisk næsekegle):

$$\Delta X_{ct}\cdot\left(C_{na}\right)_{ct}\cdot qa = 2qa\left(\frac{d_2}{d}\right)^2\cdot\left(\frac{2l_2}{3} - l_1\right) - 2qa\left(\frac{d_1}{d}\right)^2\cdot\left(\frac{2l_1}{3} - l_1\right)$$

Indsættes udtrykket for $(c_{n\alpha})_{ct}$ i denne ligning, samt udnyttes det at der gælder:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{l_2}{l_1} \quad \text{og}$$

$$L_{ct} = l_2 - l_1$$



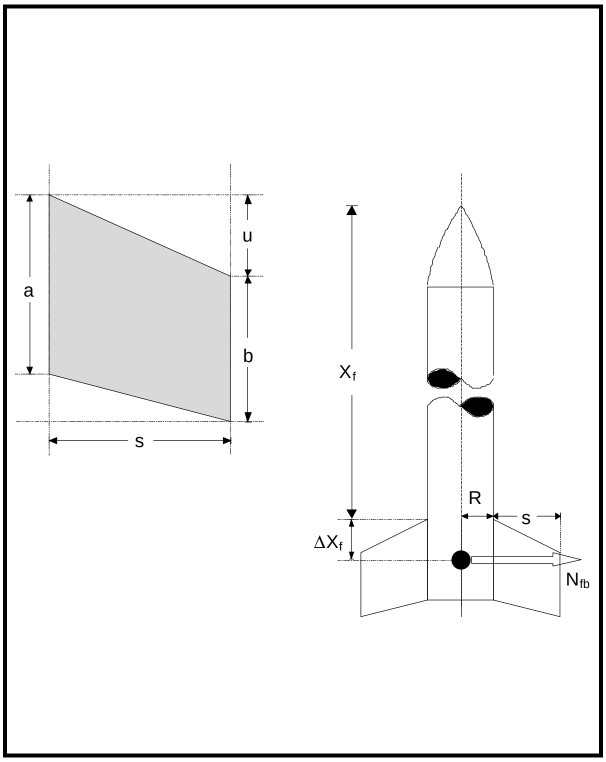
finder man efter nogle ikke trivielle mellemregninger:

$$\boxed{X_{ct} = (X_{pos})_{ct} + \frac{L_{ct}}{3}\left[1 + \frac{1 - \frac{d_1}{d_2}}{1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2}\right]}$$

Bemærk at udtrykket for $(c_{n\alpha})_{ct}$ skifter fortegn, hvis $d_1 > d_2$.

Finner

Barrowman benytter den nedenstående definition af en finne.



For en rektangulær finne udformet som en tynd plade (forudsætning 8) gælder med tilnærmelse:

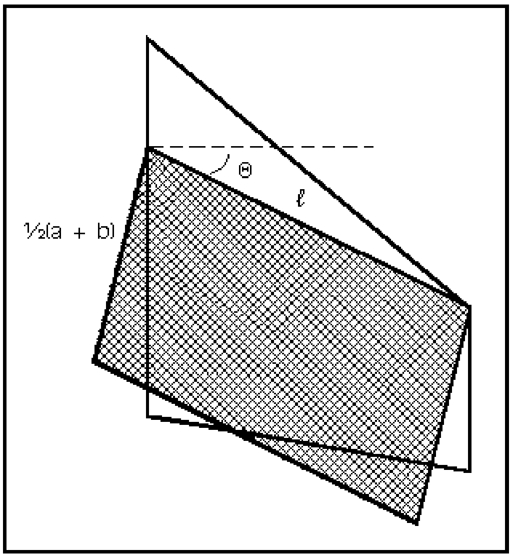
$$(c_{n\alpha})_f = \frac{4\varphi}{\pi d^2} \cdot \frac{\pi \cdot \left(\Lambda/2\right)}{1 + \sqrt{1 + \left(\Lambda/2\right)^2}}$$

hvor sideforholdet Λ er:

$$\Lambda = \frac{2\ s}{b}$$

og φ = sb er finnens areal.

Barrowman's trick for at kunne behandle en generel finne er at afbilde den generelle finne i en tilsvarende rektangulær finne. Ideen er, at finnens egenskaber afhænger af strømningen vinkelret på den aerodynamiske centerakse. For den ovenstående finnetype går den aerodynamiske center gennem midtpunktet af korderne 'a' og 'b'.



For den ækvivalente rektangulære finne gælder at semi-span s erstattes med 'semispan' ℓ for den rektangulære finne som strømningen 'ser'. Der gælder at:

$$\boxed{\ell^2 = s^2 + \left(u + ½(b - a)\right)^2}$$

korden for den ækvivalente rektangulære finne sættes lig med gennensnittet for finnens rod- og tip korde, dvs ½(a+b). Sideforholdet for den ækvivalente finne bliver således:

$$\Lambda' = \frac{4\ell}{a + b}$$

Indsættes disse størrelser i formlen for $c_{n\alpha}$ fås:

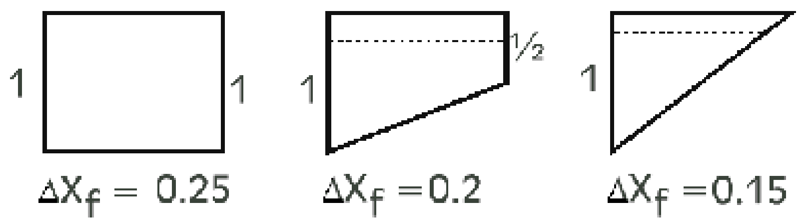
$$(c_{n\alpha})_f = \frac{4\varphi \cdot \cos(\theta)}{\pi d^2} \cdot \frac{\pi \cdot \left(\Lambda'/2\right)}{1 + \sqrt{1 + \left(\Lambda'/2\right)^2}} = \frac{4}{d^2} \cdot \frac{\dfrac{2\ell\varphi \cdot \cos(\theta)}{a + b}}{1 + \sqrt{1 + \left(\dfrac{2\ell}{a + b}\right)^2}}$$

Heri indsættes finnens areal φ = ½s(a+b), det udnyttes at s = ℓ cos(θ) samt der multipliceres med antallet af finner n:

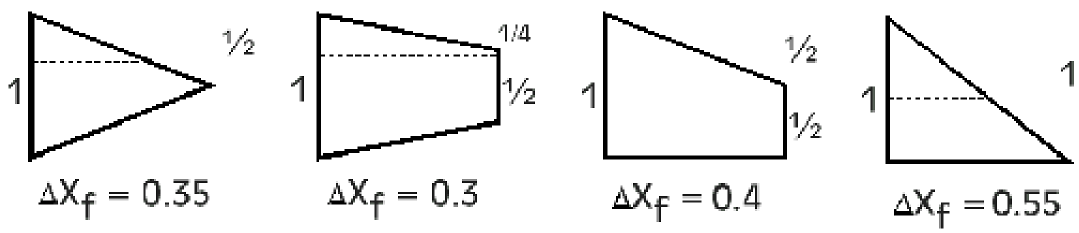
$$\boxed{\left(c_{n\alpha}\right)_f = \frac{4n \cdot \left(\frac{s}{d}\right)^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\ell}{a+b}\right)^2}}}$$

Da s altid er mindre end ℓ på en tilbagevinklet finne vil denne formel give værdier, der er lidt for lave. Barrowman's argument for at vælge denne approximation er sikkert - ud over at udtrykket bliver 'pænere' - at vinde lidt margin, idet den resulterer i lidt større finner end påkrævet. Da modelraketfolket, som er Barrowman's målgruppe, kan forventes at designe til grænsen, er denne lille margin fuldt forsvarlig.

Positionen for det aerodynamiske angrebspunkt for finnen afhænger af finnens planform, dens sideforhold og dens tykkelsesforhold. I (1) findes data for ΔX_f for 7 forskellige (tynde) planformer ved varierende sideforhold. ΔX_f afhænger stærkt af sideforholdet ved små sideforhold, men for sideforhold > 2, som er rimeligt repræsentativt for raketfinner, kanΔX_f antages konstant.



Først betragtes de planformer, hvor finnens forkant er vinkelret på flyve retningen. For nemheds skyld antages alle dele af finnen at bidrage ligeligt til det samlede lift, og at ΔX_f kan udtrykkes udelukkende ved hjælp af rod- og tip korderne a og *b*. Denne antagelse betyder, at positionen for angrebspunktet er en symmetrisk funktion af a og b, dvs. $\Delta X_f = f(a,b) = f(b,a)$. De umiddelbare kandidater for en simpel funktion, der opfylder ovenstående er a+b, a*b og 1/(a+b). Man finder relativt let de følgende to muligheder:



$$\Delta X_f = 0.15(a+b) - 0.05ab \quad \textit{eller} \quad \Delta X_f = 0.15(a+b) - 0.1\frac{ab}{a+b}$$

Af disse udtryk vælges det sidste, da det har størst lighed med Barrowman's.
For de finner der har tilbagestrøget forkant er disse udtryk utilstrækkelige. Det viser sig imidlertid, at et led proportionalt med *u* er tilstrækkeligt til at fuldstændiggøre sammenhængen:

$$X_f = (X_{pos})_f + 0.4u + 0.15(a+b) - 0.1\frac{ab}{a+b}$$

værdierne af de fundne koefficienter afhænger naturligvis af hvilke værdier af ΔX_f man finder i litteraturen, og i hvilken grad man ønsker at forkorte. Barrowman angiver for de ikke tilbagestrøgne finner udtrykket: $\Delta X_f = \frac{1}{6}\left(a + b - \frac{ab}{a+b}\right)$, som man med lidt god vilje kan få ved at forkorte det tidligere anførte udtryk. Dette pæne udtryk kan desværre ikke på tilsvarende enkel vis modificeres til brug for finner med tilbagestrøget forkant. Nu må man også have et led som også indeholder *a* og *b*, og får værdien $0.3438 \cdot u\left(1 + \frac{b}{a+b}\right)$, som efter afrunding giver det samlede udtryk:

$$\boxed{X_f = (X_{pos})_f + \frac{u(a+2b)}{3(a+b)} + \frac{1}{6}\left(a + b - \frac{ab}{a+b}\right)}$$

Her slutter Barrowman sin beregning af det resulterende angrebspunkt for de aerodynamiske kræfter. Hans fremgangsmåde har vundet så stor udbredelse blandt raketamatører, at den er så godt som enerådende. Selv blandt de mest avancerede raketfreaks er det den almindelige opfattelse, at Barrowman's metode er den eneste realistiske fremgangsmåde, hvis ikke man har adgang til vindtunneler eller supercomputere. Det er imidlertid vigtigt at gøre sig klart, at Barrowman's fremgangsmåde er baseret på forsimplede principper, og at han sætter nogle meget konkrete begrænsninger på metodens anvendlighed.

Den mest udbredte forglemmelse er kravet om at hastigheden skal være mindre end 180m/s. Ved større hastigheder ændres $(c_{n\alpha})_f$ dramatisk. For finner med lille tykkelsesforhold betyder ændringen at X_{cp} vandrer bagud indtil lydens hastighed nås, hvorefter det igen vandrer fremad, så den ved ca. 2 gange lydens hastighed igen når den position Barrowman har bestemt. Man oplever derfor ikke et stabilitetsproblem, og kan derfor fristes til at mene at metoden stadig er OK, skønt de beregnede værdier ikke længere er rigtige.

En anden mangel ved metoden er at den ikke tager hensyn til interferens mellem de enkelte komponenter. Således skal man principiet tage hensyn til interferens mellem næsekeglen og resten af raketkroppen, mellem finnerne og raketkroppen, mellem koniske overgange og raketkroppen, samt mellem flere sæt finner indbyrdes. Specielt det sidste er relevant, da man på en raket med 2 sæt finner risikerer, at det forreste sæt 'skygger' for det bageste. Konklusionen er, at metoden er utilstrækkelig for den seriøse raketamatør.

Statisk stabilitet

Den anvendte fremgangsmåde for bestemmelse af luftens angrebspunkt kan udbygges så de fleste af Barrowman's forudsætninger ophæves. Et mere detaljeret studie af hvorledes de enkelte komponenter opfører sig ved forskellige hastigheder kan helt overkomme begrænsningen i hastighed og finnetykkelse. Begrænsningen i angrebsvinkel kan overkommes ved at benytte 'rigtige' lift koefficienter istedet for blot hældningen. Der vil dog stadig kun være tale om en metode, som dækker de statiske forhold, og man benytter da også den 'statiske margin':

$$SM = \frac{X_{cp} - X_{cg}}{d}$$

som stabilitetsmål, med tommelfingerreglen, at 1 < SM < 2 for en 'fornuftigt' designet raket.

Dynamisk stabilitet

Ved en dynamisk stabilitetsundersøgelse må rakettens bevægelse medregnes, idet dens tyngdepunkt vil følge en ballistisk bane, hvorimod resten af raketten vil dreje sig omkring tyngdepunktet. De enkelte dele af raketten vil få induceret en hastighedskomposant fra drejebevægelsen, hvis størrelse afhænger af den enkelte dels afstand fra tyngdepunktet og vinkelhastigheden i drejebevægelsen. I middel vil alle rakettens dele naturligvis have den samme hastighed, men ud fra en øjebliksbetragtning vil rakettens dele have lokalt varierende hastighedsvektorer - og dermed angrebsvinkler. For flyvinger og raketfinner gælder, at hvis angrebsvinklen bliver tilstrækkeligt stor bliver liftkoefficientens hældning i forhold til angrebsvinklen negativ (stall). For en raket med 2 sæt finner, hvoraf det ene sæt befinder sig langt fra tyngdepunktet, vil en stor vinkelhastighed ved en ellers relativt lav hastighed kunne stabiliteten i fare, selvom raketten er statisk stabil ved den aktuelle angrebsvinkel. For at lave en dynamisk stabilitetsundersøgelse skal man således undersøge positionen af luftens angrebspunkt ved alle hastigheder, alle angrebsvinkler og alle vinkelhastigheder, hvilket selvsagt er en omfattende affære.

Litteratur:

1. NACA Technical Report 1307.
2. NACA Tecnical Report 1253.
3. J. Frank: 'Stabilisering af raketter ved hjælp af Barraowman's metode'
4. I. H. Abbot, A. E. von Doenhoff: 'Theory of wing sections.