

D A R K



Stabilisering af raketter ved hjælp af Barrowman's
metode

Af

Jørgen Franck

og

Hans Olaf Toft

DARK, juni 2004

Indholdsfortegnelse:

INDHOLDSFORTEGNELSE:	2
1.0 STABILISERING AF RAKETTER VED HJÆLP AF BARROWMAN'S METODE	3
1.1 PARAMETRE FOR NÆSEKEGLEN:.....	7
1.2 PARAMETRE FOR KONISKE OVERGANGE.....	9
1.3 PARAMETRE FOR FINNERNE.....	10
2.0 UDVIDELSER AF METODEN	12
2.1 PARAMETRE FOR ELLIPTISKE FINNER.....	12
2.2 EN MERE GENEREL MODEL FOR NÆSEKEGLEN.....	12
2.3 DIMENSIONERING AF FINNERNE UDFRA EN FASTLAGT STABILITETSFAKTOR.....	16
2.4 EFFEKTEN AF ENDELIGE ANGREBSVINKLER.....	19
2.4 RAKETKROPPE, ISOLERET BETRAGTET.....	19
2.5 STABILITET FOR RAKETTER VED ENDELIGE ANGREBSVINKLER.....	22
3.0 MANGLER I METODEN	24
3.0 REFERENCER:	25

1.0 Stabilisering af raketter ved hjælp af Barrowman's metode.

Metoden benytter følgende antagelser:

1. Angrebsvinklen for luftens kræfter er mindre end 10 grader.
2. Raketten hastighed er mindre end 180m/s.
3. Luftstrømningen omkring raketten skal være jævn og må ikke pludselig ændre retning.
4. Raketten Længde skal være større end ti gange diameteren.
5. Raketten næse er glat og ender i et punkt.
6. Raketten er symmetrisk omkring længdeaksen og uelastisk.
7. Finnerne har form som tynde plane plader.

Det er meget vigtigt, at antagelserne overholdes, da disse fortæller hvad de matematiske formler kan og ikke kan simulere fysisk. Metoden benytter en form for vægtning af normalkraften på de enkelte raketdele. Normalkraften kan skrives som følger:

$$N = \frac{1}{2} C_{N\alpha} \rho V^2 \alpha A_r$$

hvor:

- N er den totale normalkraft, som luftstrømningen omkring raketten forårsager.
- $C_{N\alpha}$ er normalkoefficient hældningen - en koefficient der tager højde for raketten form.
- ρ er luftens massefylde.
- V er raketten hastighed.
- A_r er et reference areal, der tager højde for raketten størrelse.
- α er angrebsvinklen.

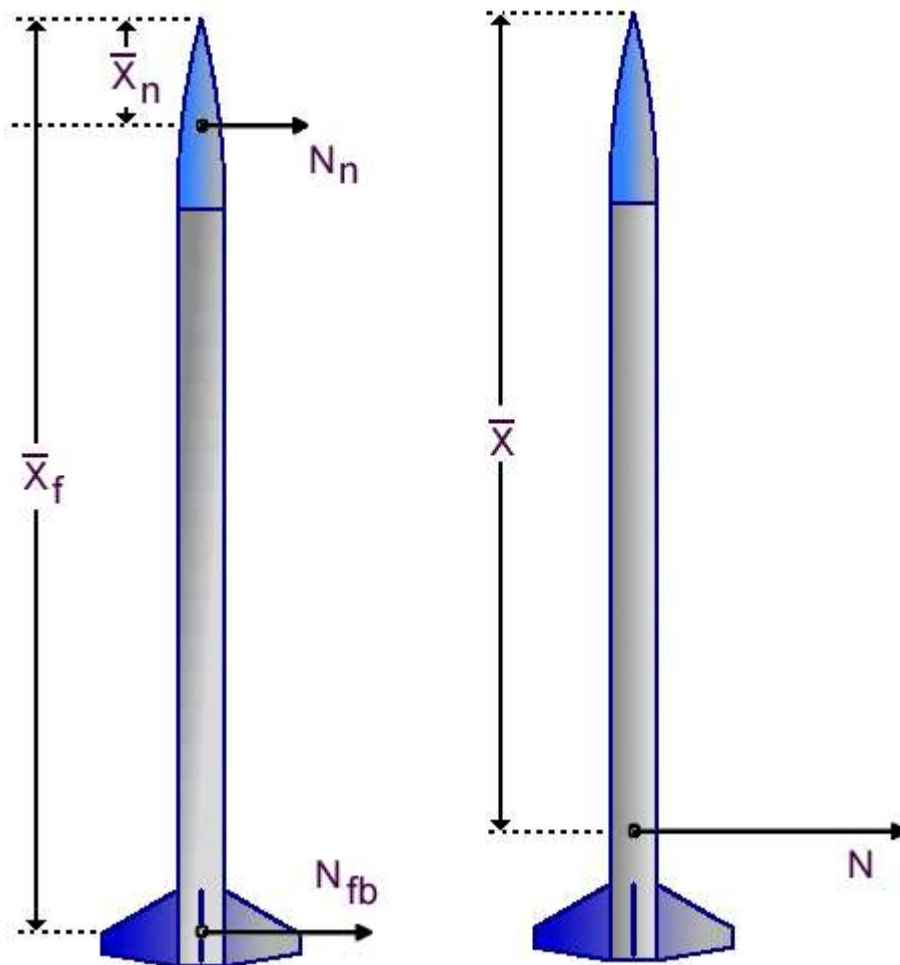
Vi ønsker nu, at vise hvorfor det er matematisk forsvarligt at benytte normalkoefficienthældningen $C_{N\alpha}$ istedet for normalkraften. Af fig.1 fås, at

$$N = N_n + N_{fb}$$

og

$$N \bar{X} = N_n \bar{X}_n + N_{fb} \bar{X}_{fb}$$

$$\bar{X} = \frac{N_n \bar{X}_n + N_{fb} \bar{X}_{fb}}{N_n + N_{fb}}$$



Normalkræfter på næsen og finnerne

Total normalkraft

$$\bar{X} = \frac{\frac{1}{2}(C_{N\alpha})_n \rho V^2 \alpha A_r \bar{X}_n + \frac{1}{2}(C_{N\alpha})_{fb} \rho V^2 \alpha A_r \bar{X}_{fb}}{\frac{1}{2}(C_{N\alpha})_n \rho V^2 \alpha A_r + \frac{1}{2}(C_{N\alpha})_{fb} \rho V^2 \alpha A_r}$$

$$\bar{X} = \frac{(C_{N\alpha})_n \bar{X}_n + (C_{N\alpha})_{fb} \bar{X}_{fb}}{(C_{N\alpha})_n + (C_{N\alpha})_{fb}}$$

Ud fra denne ligning kan vi nu finde angrebepunktet for luftens kræfter for hele raketten. Hvorfor vi har udeladt den cylindriske krop af beregningerne, er fordi normalkraften er forsvindende for små anrebssvinkler (se fig. 2).

Når man ønsker, at beregne angrebepunktet deles raketten op i følgende sektioner, og disse analyseres derefter separat (se fig. 2).

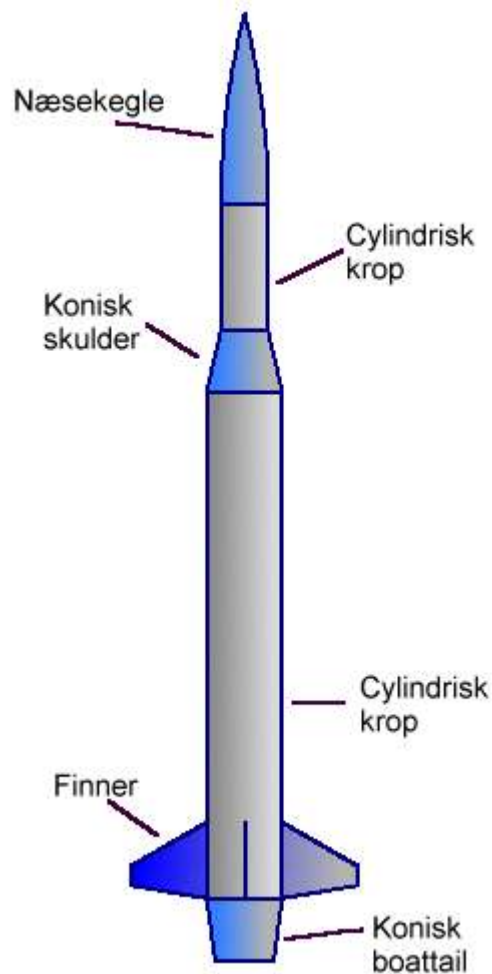


Fig. 2

Da vi udledte ligningen til bestemmelse af angrebepunktet for luftens kræfter for hele raketten, medtog vi ikke koniske overgange, men i udledningen kan der umiddelbart inkluderes et vilkårligt antal koniske overgange og evt. placering af finner længere oppe på kroppen. Ligningen for raketten på fig. 3 bliver f.eks.

$$\bar{X} = \frac{(C_{N\alpha})_n \bar{X}_n + (C_{N\alpha})_{cs} \bar{X}_{cs} + (C_{N\alpha})_{cb} \bar{X}_{cb} + (C_{N\alpha})_{fb} \bar{X}_f}{(C_{N\alpha})_n + (C_{N\alpha})_{cs} + (C_{N\alpha})_{cb} + (C_{N\alpha})_{fb}}$$

Husk at de cylindriske kroppe udelades af beregningerne. Nomenklaturforklaring følger senere.

På fig. 3 er henholdsvis angrebepunktet for luftens kræfter og placeringen af de enkelte sektioner angivet. På fig. 4 ses de normalefficient hældninger, der påvirker de enkelte sektioner, og koefficientens momentarm. Det bemærkes, at raketens spids benyttes som referencepunkt.

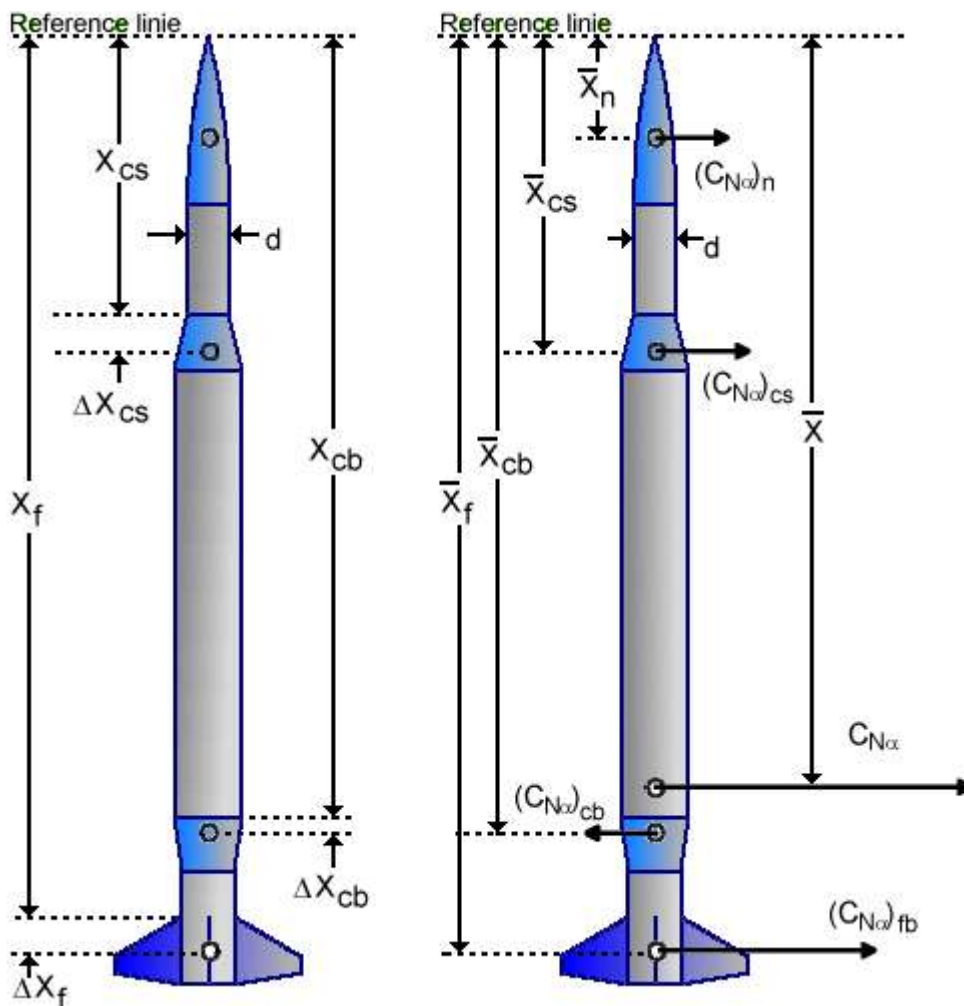


Fig. 3

Fig. 4

Der benyttes følgende indeksnotation:

- cb = konisk boattail
- cs = konisk skulder
- f = finnerne
- fb = finnerne i nærværelse af raketkroppen
- n = næsen

Normalkoefficient hældningen $C_{N\alpha}$ har i det følgende dimensionen rad^{-1} - altså "pr. radian".

1.1 Parametre for næsekeglen:

Generelt kan normalkoefficient hældningen for en vilkårlig næseform sees til

$$C_{N\alpha} = 2$$

Angrebspunktet varierer dog for den enkelte næseform.

Konisk næse :

$$\bar{X} = \frac{2}{3} L$$

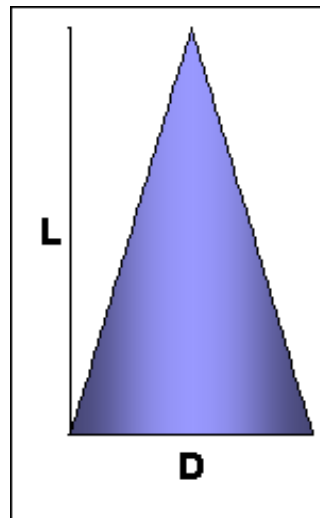


Fig. 5

Parabolsk næse:

$$\bar{X} = \frac{1}{2} L$$

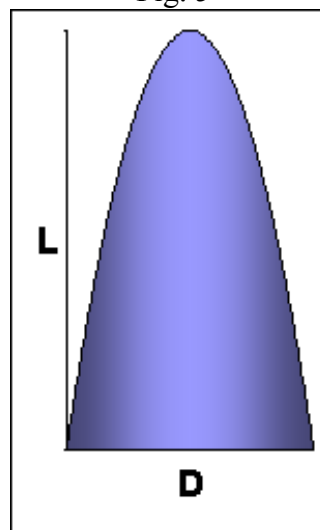


Fig. 6

Tangent ogive næse:
 $\bar{X} \approx 0.466 L$

Her forudsættes det dog
at

$$\frac{L}{D} > 2.5$$

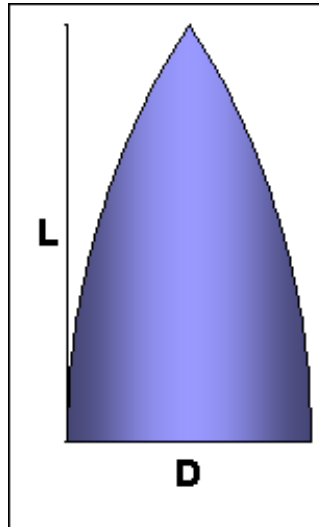


Fig. 7

Elliptisk næse:

$$\bar{X} = \frac{1}{3} L$$

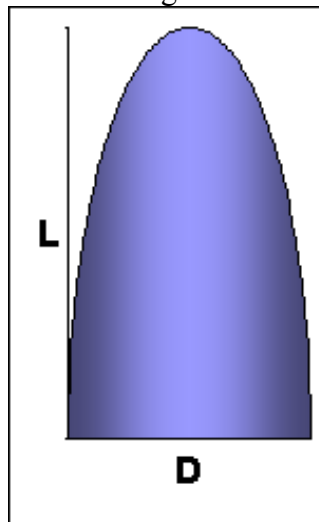


Fig. 8

1.2 Parametre for koniske overgange

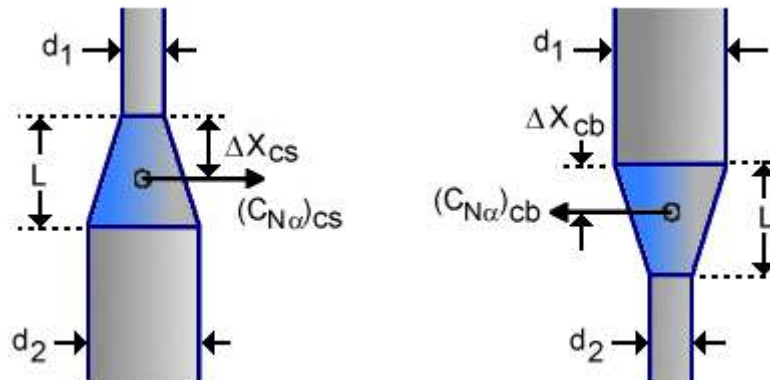


Fig. 9

For den koniske skulder er den dimensionløse koefficient og angrebspunktet for luftens kræfter følgende,

$$(C_{N\alpha})_{cs} = 2 \left[\left(\frac{d_2}{d} \right)^2 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^2 \right]$$

$$\bar{X}_{cs} = X_{cs} + \Delta X_{cs} = X_{cs} + \frac{L}{3} \left[1 + \frac{1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)}{1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2} \right]$$

For den koniske boattail er den dimensionsløse koefficient og angrebspunktet for luftens kræfter følgende,

$$(C_{N\alpha})_{cb} = 2 \left[\left(\frac{d_2}{d} \right)^2 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^2 \right]$$

$$\bar{X}_{cb} = X_{cb} + \Delta X_{cb} = X_{cb} + \frac{L}{3} \left[1 + \frac{1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)}{1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2} \right]$$

hvor d er næsens diameter. Bemærk, at ligningen for normaloefficient hældningen er ens i begge tilfælde, dog bliver koefficienten negativ for den koniske boattail.

1.3 Parametre for finnerne

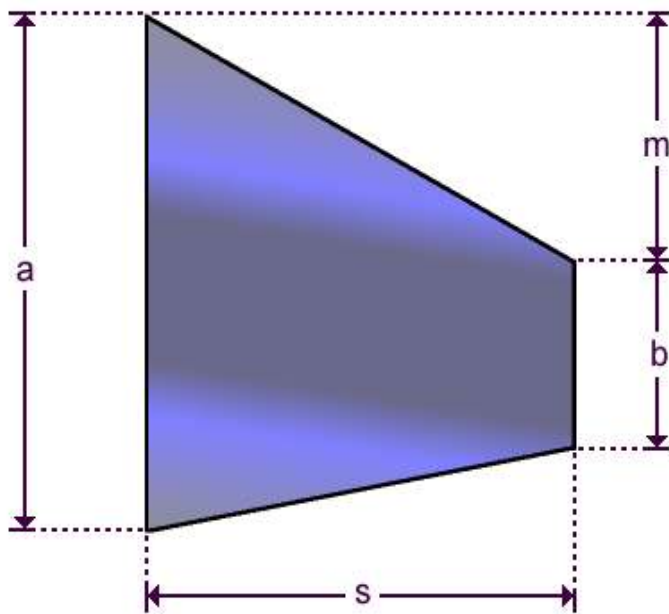


Fig. 10

Normalkoefficient hældningen for n finner er

$$(C_{N\alpha})_f = \frac{4n\left(\frac{s}{d}\right)^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\lambda}{a+b}\right)^2}}$$

hvor d er næsens diameter og

$$\lambda^2 = S^2 + \left(m + \frac{1}{2}(b-a)\right)^2$$

Antallet af identiske finner kan kun være 3, 4 eller 6. Luftstrømmen omkring finnerne forstyrres af den cylindriske krop. Dette tages der højde for ved at multiplicere koefficienten med en interferensfaktor så den totale koefficient for n finner under tilstedeværelse af kroppen bliver,

$$(C_{N\alpha})_{fb} = K_{fb}(C_{N\alpha})_f$$

For n=3 eller n=4 er interferensfaktoren,

$$K_{fb} = 1 + \frac{R}{S+R}$$

For n=6 er interferensfaktoren.

$$K_{fb} = 1 + \frac{R}{2(S+R)}$$

Angrebspunktet for luftens kræfter, er uafhængigt af antallet af finner, da finnerne er identiske. Man får

$$\bar{X}_f = X_f + \Delta X_f = X_f + \frac{m(a+2b)}{3(a+b)} + \frac{1}{6}\left(a+b - \frac{ab}{a+b}\right)$$

Nu beregnes \bar{X} ud fra ligningen der blev udledt i starten.

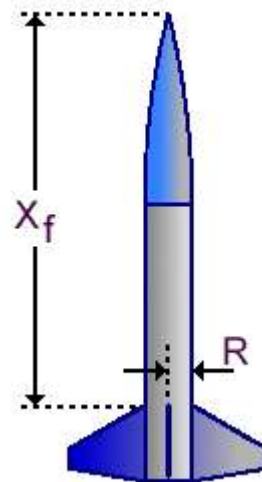


Fig. 11

Til stabilisering af raketter benyttes den dimensionsløse stabilitetsfaktor SF, der er lig

$$SF = \frac{\bar{X} - TP}{d_{max}}$$

hvor TP er tyngdepunktets placering målt fra raketens spids og d_{max} er raketens maximale diameter. Raketten er stabil hvis SF er større end eller lig 1. Det bemærkes at hvis SF bliver for stor bliver raketten "overstabil", dvs. den reagerer kraftigere end nødvendigt på en aerodynamisk forstyrrelse, hvilket både er uøkonomisk og giver en uønsket høj følsomhed overfor sidevind. En tommelfingerregel siger at $1 < SF < 2$ for en veldimensioneret raket.

For en flertrinsraket, må man sørge for, at den er stabil i enhver af de konfigurationer den antager. Endvidere dimensioneres de enkelte motortrin, der afkastes under flyvning, så de er ustabile. Denne ustabilitet opnås ved, at angrebepunktet for luftens kræfter på finnerne, der er placeret på motortrinnet, er foran eller sammenfaldende med motortrinnets tyngdepunkt.

2.0 Udvidelser af metoden

2.1 Parametre for elliptiske finner

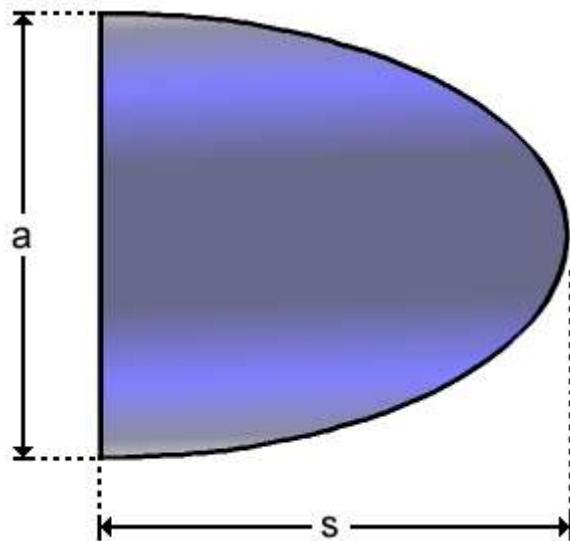


Fig. 12

Såfremt der benyttes finner med ellipsoid planform bliver normalkoefficient hældningen:

$$(C_{N\alpha})_f = \frac{4n\left(\frac{s}{d}\right)^2}{1 + \sqrt{1 + 1.623\left(\frac{s}{a}\right)^2}}$$

den totale koefficient for n finner under tilstedeværelse af kroppen bliver som for trapezoide finner,

$(C_{N\alpha})_{fb} = K_{fb}(C_{N\alpha})_f$ med K_{fb} beregnet som ved trapezoide finner.

Angrebspunktet for luftens kræfter bestemmes som $\bar{X}_f = X_f + \Delta X_f = X_f + 0.288a$

2.2 En mere generel model for Næsekeglen

Barrowman benytter en approksimativ aerodynamisk metode, den såkaldte "slender body theory" for bestemmelse af angrebspunktet og normalkoefficient hældningen for raketens næsekegle. Fra "slender body theory" følger at $C_{N\alpha} = 2$ uanset næsekeglens form, mens angrebspunktet kan beregnes som:

$$\bar{X}_n = L - \frac{V_n}{A_n}$$

hvor L er næsekeglens længde, V_n er dens volumen og A_n er dens grundfladeareal.

Indsætter man udtrykket for volumen for en kegle eller en paraboloid eller for en ellipsoide finder man de udtryk der er vist i kapitel X.

Det bemærkes iøvrigt at de formeludtryk der er anført for koniske overgange fremkommer ved "differensdannelse" mellem to koniske næsekegler.

For en tangent ogive næsekegle bliver udtrykket mere kompliceret. Først opskriver vi "formlen" for en tangent ogive næsekegle med længde L og diameter D

$$y^2 + (x - \gamma)^2 = R_n^2 \Rightarrow$$

$$x = \gamma + \sqrt{R_n^2 - y^2}$$

hvor

$$y = \frac{D}{2} - R_n \quad \text{og} \quad R_n = \frac{D}{4} + \frac{L^2}{D}$$

Volumen kan nu beregnes som

$$V_n = \pi \int_0^L x^2 dy = \pi \int_0^L (y + \sqrt{R_n^2 - y^2})^2 dy$$

Efter integration finder man:

$$V_n = \pi R_n^3 \left(\Lambda (1 + \mu^2 - \frac{\Lambda^2}{3}) - \mu \sqrt{1 - \Lambda^2} - \mu \arcsin \Lambda \right)$$

hvor

$$\mu = 1 - \frac{D}{2R_n} \quad \text{og} \quad \Lambda = \frac{L}{R_n}$$

Af hensyn til beregningen af angrebepunktet for luftens kræfter omskrives udtrykket for volumenet ved anvendelse af den dimensionsløse størrelse

$$\beta = \frac{L}{D}$$

Vi får herved

$$\Lambda = \frac{L}{R_n} = \frac{L}{\frac{D}{4} + \frac{L^2}{D}} = \frac{\frac{L}{D}}{\frac{1}{4} + (\frac{L}{D})^2} = \frac{\beta}{\frac{1}{4} + \beta^2}$$

$$\mu = 1 - \frac{D}{2R_n} = 1 - \frac{D}{2(\frac{D}{4} + \frac{L^2}{D})} = 1 - \frac{1}{2(\frac{1}{4} + (\frac{L}{D})^2)} = 1 - \frac{1}{2(\frac{1}{4} + \beta^2)}$$

$$R_n^3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{L^2}{D} \right) = \left(D \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{L}{D} \right)^2 \right) \right)^3 = D^3 \left(\frac{1}{4} + \beta^2 \right)$$

Udtrykket for volumenet kan nu indsættes i formlen for angrebepunktet for luftens kræfter regnet fra spidsen, hvilket giver

$$\bar{X}_n = L - \frac{V_n}{A_n} \Rightarrow$$

$$\bar{X}_n = L - \frac{\pi R_n^3 \left(\Lambda (1 + \mu^2 - \frac{\Lambda^2}{3}) - \mu \sqrt{1 - \Lambda^2} - \mu \arcsin \Lambda \right)}{A_n} \Rightarrow$$

$$\bar{X}_n = L - \frac{4 A_n D \left(\frac{1}{4} + \beta^2\right)^3 \left(\Lambda(1 + \mu^2 - \frac{\Lambda^2}{3} - \mu\sqrt{1 - \Lambda^2}) - \mu \arcsin \Lambda\right)}{A_n} \Rightarrow$$

$$\bar{X}_n = L - 4 D \left(\frac{1}{4} + \beta^2\right)^3 \left(\Lambda(1 + \mu^2 - \frac{\Lambda^2}{3} - \mu\sqrt{1 - \Lambda^2}) - \mu \arcsin \Lambda\right)$$

Det bemærkes, at angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive næsekegle er noget mere kompliceret end for henholdsvis en konisk, parabolisk og elliptisk næsekegle. Desuden indgår både længden og diameteren i udtrykket for angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive næsekegle.

For en nærmere undersøgelse af variationen af angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive næsekegle som funktion af β , omskrives formlen på dimensionsløs form som følger

$$\frac{\bar{X}_n}{L} = 1 - \frac{4}{\beta} \left(\frac{1}{4} + \beta^2\right)^3 \left(\Lambda(1 + \mu^2 - \frac{\Lambda^2}{3} - \mu\sqrt{1 - \Lambda^2}) - \mu \arcsin \Lambda\right)$$

Det ene grænsetilfælde er hvor spidsen er en halvkugle, dvs. længden L er lig radius i halvkuglen:

$$\beta = \frac{L}{D} = \frac{1}{2} \Rightarrow L = \frac{D}{2}$$

Indsættes ovenstående værdi for β i formlen for angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive spids, fås

$$\frac{\bar{X}_n}{L}(\beta = \frac{1}{2}) = 1 - \frac{4}{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} + (\frac{1}{2})^2\right)^3 \left(1(1 + 0^2 - \frac{1^2}{3} - 0\sqrt{1 - 1^2}) - 0 \arcsin 1\right) \Rightarrow$$

$$\bar{X}_n(\beta = \frac{1}{2}) = \frac{L}{3}$$

Det bemærkes, at resultatet er det samme som det der gælder generelt for en elliptisk næsekegle.

Det andet grænsetilfælde er for β gående mod uendelig. Umiddelbart ser det ikke ud som om formlen konvergerer, da begge led går mod uendelig i formlen. Det skal dog bemærkes, at det er differensen mellem to led der går mod uendelig for β gående mod uendelig. Som tilnærmet værdi for angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive spids for β gående mod uendelig kan benyttes

$$\bar{X}_n(\beta \rightarrow \infty) \approx 0.466 L$$

Ovennævnte approksimation benyttes af Barrowman, uden at han angiver betingelserne for approksimationens anvendelsesområde.

Af nedenstående figur ses den grafiske afbildning af angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive næsekegle som funktion af β . Det ses tydeligt, at for β mindre end 2.5 begynder kurven at afvige fra approksimationen hvor den eksakte formel bør anvendes til beregning af angrebspunktet for luftens kræfter for en tangent ogive spids.

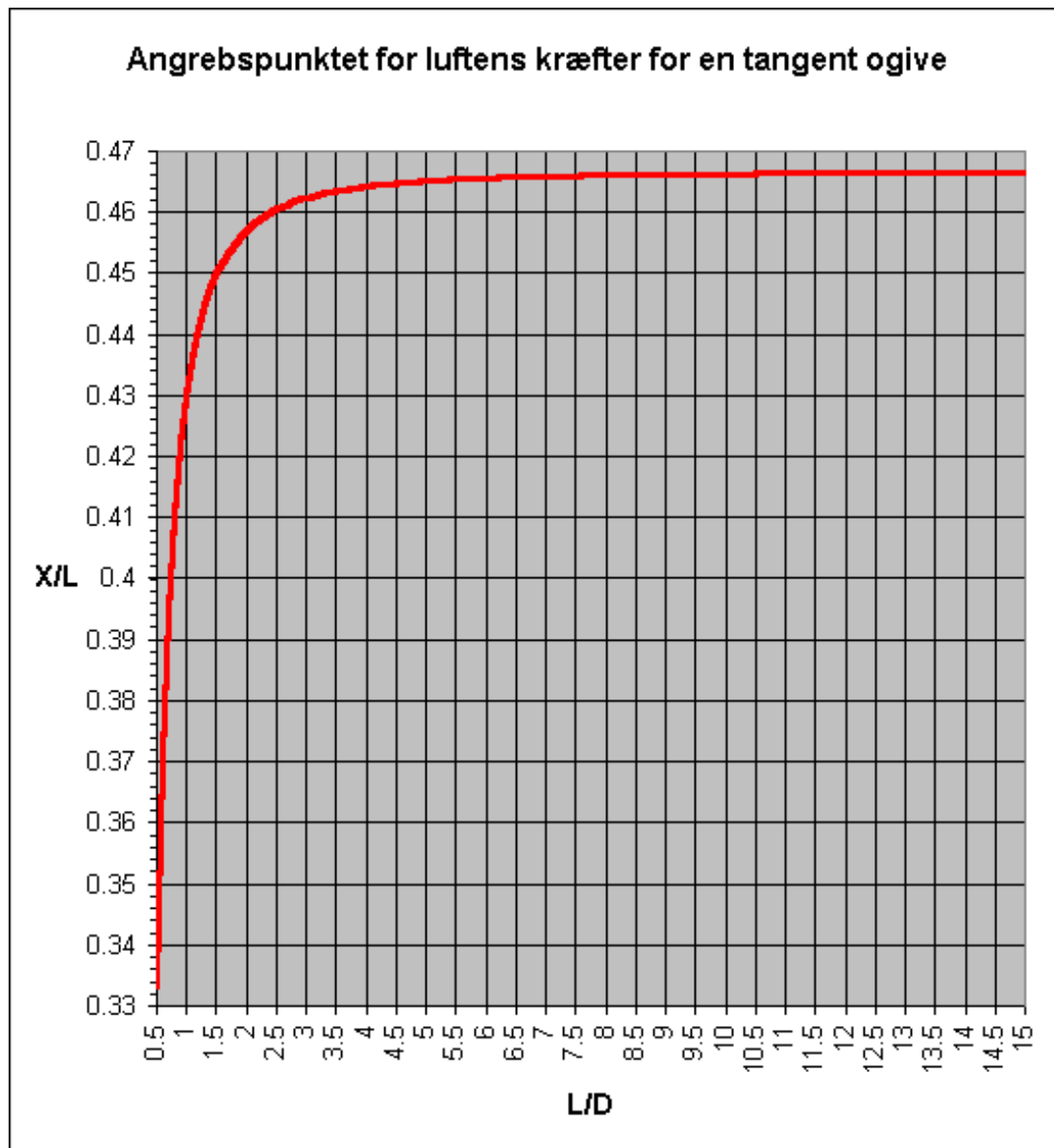


Fig. 13

2.3 Dimensionering af finnerne ud fra en fastlagt stabilitetsfaktor

Beregningsformlerne i Barrowman's metode er opskrevet på en uhensigtsmæssig form, når man ønsker at dimensionere finnerne ud fra en fastlagt stabilitetsfaktor. På den nuværende form er man tvunget til at gennemregne et givet antal finnekonfigurationer før den ønskede stabilitetsfaktor opnås. Dette problem kan dog løses ved at indføre følgende formfaktorer for den pågældende finnesektion

$$b = E a \quad s = F a \quad \text{og} \quad m = G a$$

hvor E, F og G er konstanter der angiver finnens dimensioner i forhold til a, der nu er den eneste ubekendte. Indføres dette i normalkoefficient hældningen for finnen fås for trapezoide finner:

$$(C_{N\alpha})_{fb} = \frac{4n \left(\frac{F}{d}\right)^2 a^2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4(F^2 + (G + \frac{1}{2}(E-1))^2)}{(1+E)^2}}} = \Theta a^2$$

Hvor der er indsat udtrykket for λ^2

$$\lambda^2 = \left(F^2 + \left(G + \frac{1}{2}(E-1)\right)^2\right) a^2$$

For interferensfaktoren og angrebepunktet for luftens kræfter fås:

$$K_{fb} = 1 + \frac{WR}{Fa + R} \quad (W=1 \text{ for } n=3 \text{ og } n=4; W=1/2 \text{ for } n=6)$$

$$\bar{X}_f = L_r + \left[-1 \frac{G(1+2E)}{3(1+E)} + \frac{1}{6} \left(\frac{E}{1+E}\right)\right] a = L_r + \Psi a$$

hvor $L_r = X_r + a$ og er indført for at undgå at finnen bliver dimensioneret for langt bagud på raketten.

Betragtes nu formlen for angrebepunktet for luftens kræfter for hele raketten fås

$$\bar{X} = \frac{\sum_i (C_{n\alpha})_i \bar{X}_i + (C_{n\alpha})_{fb} \bar{X}_f}{\sum_i (C_{n\alpha})_i + (C_{n\alpha})_{fb}} \Rightarrow$$

$$\bar{X} \sum_i (C_{n\alpha})_i - \sum_i (C_{n\alpha})_i \bar{X}_i + [\bar{X} - \bar{X}_f] (C_{n\alpha})_{fb} = 0$$

For den givne raket antages tyngdepunktet (TP) at være kendt, og da der ønskes dimensioneret til en bestemt værdi af SF kan \bar{X} således beregnes

$$\bar{X} = SF d_{max} + TP$$

Da raketten form på nær finnerne allerede er fastlagt kan vi indføre

$$\Phi = \bar{X} \sum_i (C_{n\alpha})_i - \sum_i (C_{n\alpha})_i \bar{X}_i$$

som vi indfører i stabilitetsligningen, som herefter får formen

$$[\bar{X} - \bar{X}_f] (C_{n\alpha})_{fb} + \Phi = 0$$

Indsættes nu de fundne udtryk for finnesektionen fås

$$[\bar{X} - L_r - \Psi a] \left[1 + \frac{WR}{Fa + R} \right] \Theta a^2 + \Phi = 0 \Rightarrow$$

$$[\bar{X} - L_r - \Psi a] [Fa + R(1 + W)] \Theta a^2 + [Fa + R] \Phi = 0 \Rightarrow$$

$$[-F\Psi a^2 + (F(\bar{X} - L_r) - \Psi R(1 + W))a + R(1 + W)(\bar{X} - L_r)] \Theta a^2 + F\Theta a + R\Theta = 0$$

Ovenstående udtryk identificeres som et fjerdegradspolynomium med den ubekendte a som variabelen, resten af parametrene er givet for den aktuelle raket.

Polynomiet kan skrives på formen

$$A_1 a^4 + A_2 a^3 + A_3 a^2 + A_4 a + A_5 = 0$$

hvor koefficienterne er

$$A_1 = -F \Psi \Theta$$

$$A_2 = [F(\bar{X} - L_r) + \Psi R(1 + W)] \Theta$$

$$A_3 = R(1 + W)(\bar{X} - L_r) \Theta$$

$$A_4 = F \Phi$$

$$A_5 = R \Phi$$

Vi kan nu finde a ved at løse fjerdegradspolynomiet, eksempelvis ved hjælp af Newton-Raphson's iterationsformel. Polynomiet har fire løsninger, men vi er dog kun interesseret i den løsning hvor a er reel og positiv, hvis en sådan findes.

Den tilsvarende beregning for ellipsoide finner forløber helt på samme vis og ender med samme resultat, dog med nye værdier for θ og ψ :

Indsættes $s = F a$ i udtrykket for normalcoeffcient hældningne for elliptiske finner fås

$$(C_{N\alpha})_f = \frac{4n \left(\frac{F}{d}\right)^2}{1 + \sqrt{1 + 1.623 F^2}} a^2 = \Theta a^2$$

og tilsvarende for angrebepunktet

$$\bar{X}_f = X_f + 0.288 a = L_r - 0.712 a = L_r + \Psi a$$

2.4 Effekten af endelige angrebsvinkler

Barrowman forudsætter i sine beregninger at angrebsvinklen er "lille", men sætter ikke nogen konkrete grænser for angrebsvinklen. Begrænsningen på angrebsvinklen hidrører primært fra raketkroppens cylindriske krop. Normalkraften på den cylindriske krop er

$$N = \frac{1}{2} (C_{N})_{body}(\alpha) \rho V^2 A_r$$

hvor normalkoefficienten kan skrives på formen

$$(C_{N})_{body}(\alpha) = (C_{Nc})_b \sin(\alpha) |\sin(\alpha)| \quad (\alpha \text{ i radianer})$$

I kapitel 1 benyttes normalkoefficient hældningen

$$C_{N\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{d C_N(\alpha)}{d \alpha} \right]$$

hvoraf man konkluderer at normalkoefficient hældningen for en cylindrisk raketkrop bliver

$$(C_{N\alpha})_b = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [2(C_{Nc})_b \alpha] = 0$$

hvilket retfærdiggør at Barrowman udelader cylinderkomponenter i sit udtryk.

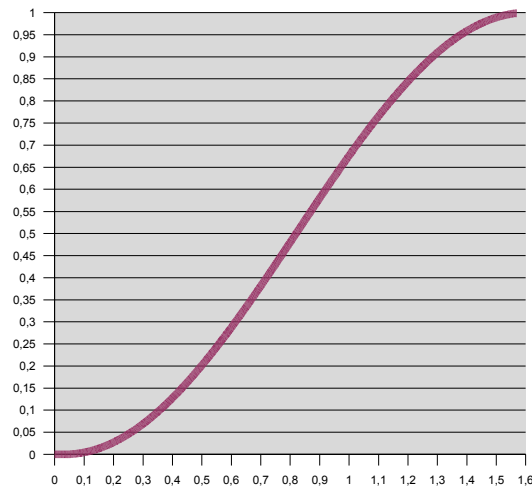


Fig. 14

Forløbet af $(C_N)_{body}(\alpha)$ som funktion af α (med $(C_{Nc})_b = 1$) er vist på fig. 14.

2.4 Raketkroppen, isoleret betragtet

Det viser sig, at det ovenstående bidrag til normalkraften genereres af alle dele af raketkroppen - ikke kun de cylindriske dele. For raketkroppen alene kan stabilitetsberegningen kan imidlertid let udvides med den komplette model, idet:

$$C_N(\alpha)_{body} = \frac{(C_{N\alpha})_{body}}{2} \cdot \sin(2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + (C_{Nc})_b \sin(\alpha) |\sin(\alpha)|$$

hvor $(C_{N\alpha})_{body}$ er den resulterende normalkoefficient hældning for raketten uden finner, bestemt ved fremgangsmåden i kapitel 1.

Det resulterende angrebspunkt kan herefter beregnes som

$$\bar{X}(\alpha) = \frac{\frac{(C_{N\alpha})_{body}}{2} \cdot \sin(2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \bar{X}_{body} + (C_{Nc})_b \sin(\alpha) |\sin(\alpha)| \cdot (\bar{X}_N)_{body}}{\frac{(C_{N\alpha})_{body}}{2} \cdot \sin(2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + (C_{Nc})_b \sin(\alpha) |\sin(\alpha)|} \quad \alpha \neq 0$$

(husk at α regnes i radianer!)

hvor \bar{X}_{body} er luftens angrebspunkt for raketten uden finner, bestemt ved metoden i kapitel 1.

De øvrige størrelser bestemmes i det følgende.

For "cylinder" koefficienten gælder at

$$(C_{Nc})_b = \frac{4 \cdot \eta C_{DC} A_p}{\pi d^2}$$

hvor A_p er arealet af hele raketkroppens profil (dvs. dette bidrag stammer i virkeligheden fra hele raketkroppen - ikke kun de cylindriske dele) og d er diameteren af næsekeglens base. Faktoren C_{DC} har værdien 1.2 ved hastigheder op til ca. halvdelen af lydens hastighed, mens η afhænger af forholdet mellem raketens længde og diameter. I praksis kan η sættes til 0.7.

Angrebspunktet $\overline{(X_N)_{body}}$ for dette normalkraftbidrag er arealmidtpunktet for raketkroppens profil. For at kunne bestemme dette er det hensigtsmæssigt at opdele cylinderbidraget i separate bidrag fra hver af raketkroppens bestanddele, hvilket vi kan tillade os at gøre fordi profilarealet indlysende må være summen af de enkelte komponenters profilerarealer. Som eksempel betragter vi ligesom i kapitel 1, en raket der består af en næsekegle, en konisk skulder, en konisk boattail og 2 cylindriske sektioner, men uden finner. Man kan da skrive:

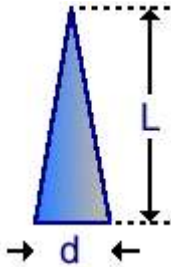
$$(C_{Nc})_b = \frac{4 \cdot \eta C_{DC}}{\pi d^2} [(A_p)_n + (A_p)_{c1} + (A_p)_{cs} + (A_p)_{c2} + (A_p)_{cb}] \Rightarrow$$

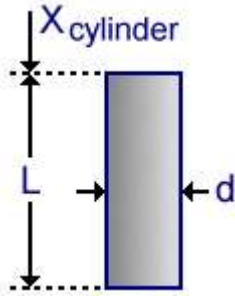
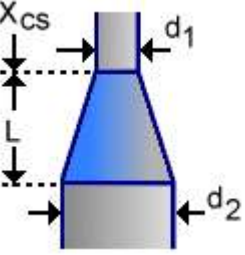
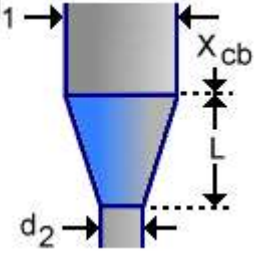
$$(C_{Nc})_b = (C_{Nc})_n + (C_{Nc})_{c1} + (C_{Nc})_{cs} + (C_{Nc})_{c2} + (C_{Nc})_{cb}$$

Hver af disse normalkraftbidrag virker i arealmidtpunktet for de enkelte komponenters profilerarealer. Under anvendelse af at den samlede normalkraft og dennes samlede moment omkring referencepunktet skal være lig med summen af de enkelte normalkraftbidrag og momenter, samt ved at bortforkorte alle fællesfaktorer finder man

$$\overline{(X_N)_{body}} = \frac{(A_p)_n \overline{(X_N)_n} + (A_p)_{c1} \overline{(X_N)_{c1}} + (A_p)_{cs} \overline{(X_N)_{cs}} + (A_p)_{c2} \overline{(X_N)_{c2}} + (A_p)_{cb} \overline{(X_N)_{cb}}}{(A_p)_n + (A_p)_{c1} + (A_p)_{cs} + (A_p)_{c2} + (A_p)_{cb}}$$

Formeludtryk til bestemmelse af profilareal samt angrebspunktet for de enkelte sektioner findes i nedenstående tabel:

Komponent	A_p	$\overline{X_N}$	
Næsekegle	Konisk: $\frac{L}{2d}$	$\frac{2L}{3}$	
	Tangent Ogive $\frac{2Ld}{3}$	$(0.6525 - 0.01817(\frac{d}{L})^2)L$	
	Parabolsk $\frac{2Ld}{3}$	$0.63L$	
	Elliptisk $\frac{\pi Ld}{4}$	$0.596L$	

Cylindrisk sektion	Ld	$X_{cylinder} + \frac{L}{2}$	
Konisk skulder	$\frac{(d_1+d_2)L}{2}$	$X_{cs} + \frac{L}{3} \frac{(d_1+2d_2)}{d_1+d_2}$	
Konisk boattail	$\frac{(d_1+d_2)L}{2}$	$X_{cs} + \frac{L}{3} \frac{(d_1+2d_2)}{d_1+d_2}$	

Såfremt man ikke er tilfreds med at sætte η til 0.7 kan man istedet benytte:

$$\eta \approx 0.440 - 1.134 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{L_{Rocket}}{d_{max}}\right) - 8.056 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{L_{Rocket}}{d_{max}}\right)^2 + 8.386 \cdot 10^{-2} \sqrt{\left(\frac{L_{Rocket}}{d_{max}}\right)}$$

Hvor L_{Rocket} er raketens totale længde og d_{max} er raketkroppens største diameter.

2.5 Stabilitet for raketter ved endelige angrebsvinkler

I det foregående afsnit blev der opstillet en relativt simpel stabilitetsmodel for raketkroppen alene, som principielt gælder for $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

For at udvide beregningen til hele raketten skal der opstilles en tilsvarende model for finnerne, hvilket i praksis viser sig at være overordentligt vanskeligt. Dels er forholdene for finnerne i sig selv ganske komplicerede, og dels forstyrres luftstrømningen hen over finnerne af den cylindriske raketkrop.

Interferensen mellem finnerne og raketkroppen udtrykkes i kapitel 1 ved faktoren K_{fb} . I det følgende udtrykkes interferensen ved hjælp af en ækvivalent angrebsvinkel:

$$\alpha_{eq} = \arctan(K_{fb} \cdot \tan(\alpha))$$

Foruden interferensen kompliceres forholdene ved at normalkraften stiger med angrebsvinklen op til en vis angrebsvinkel, α_s , hvorefter normalkraften pludselig flader ud - eller aftager. Dette fænomen omtales almindeligvis som *stall*.

Samlet kan man skrive normalkraften på finnerne, under hensyntagen til interferens med raketkroppen:

$$C_N(\alpha)_{fin} = \frac{(C_{N\alpha})_f}{2} \cdot \sin(2\alpha_{eq}) + (C_{N\alpha\alpha})_b \sin(\alpha_{eq}) |\sin(\alpha_{eq})| \quad \text{for } |\alpha_{eq}| < \alpha_s$$

hvor $(C_{n\alpha})_f$ er normalkoefficient hældningen for finnerne alene, som bestemt i kapitel 1.

Angrebspunkterne for begge antages approximativt at være \bar{X}_f , uændret i forhold til kapitel 1.

$$\alpha' \approx \frac{4}{\pi^2} \cdot (K_{fb} - 2) \cdot \alpha^3 + \frac{2}{\pi} \cdot (3 - 2K_{fb}) \cdot \alpha^2 + K_{fb} \cdot \alpha$$

$$C_N(\alpha) \approx \frac{1}{2} C_{N\alpha} \sin(2K_{fb}\alpha) \cos\left(\frac{K_{fb}\alpha}{2}\right) + (C_{Nc})_f \sin(\alpha) |\sin(\alpha)| \quad \text{for} \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2K_{fb}}$$

og

$$C_N(\alpha) \approx (C_{Nc})_f \sin(\alpha) |\sin(\alpha)| \quad \text{for} \quad \frac{\pi}{2K_{fb}} < |\alpha| < \frac{\pi}{2}$$

Da $K_{fb} > 1$ vil finernes lift toppe og hurtigere end liftet på raketkroppen. Det samme fænomen kendes også fra fly, hvor det kaldes stall.

$$(C_{Nc})_b \approx 4.8 \frac{\eta A_{pf}}{\pi d^2}$$

Hvor A_{pf} er "silhuet" arealet af finnerne

3.0 Mangler i metoden

Barrowman anvender sig af den såkaldte komponentmetode, hvor de aerodynamiske kræfter og momenter som virker på raketten antages at kunne skrives som summen af de kræfter og momenter som virker på raketten enkeltkomponenter. Da luftstrømningen forbi en komponent kan påvirke luftstrømningen forbi en anden komponent er man nødt til at indføre nogle "interferens" bidrag i komponentmetoden før den giver et realistisk resultat. Barrowman anvender faktoren K_{fb} for at tage hensyn til at raketkroppen forstyrrer strømningen forbi finnerne. Der er imidlertid et par interferensbidrag som han undlader:

1 Raketkroppen i tilstedeværelse af finnerne

Fordi finnerne forhindrer luften i at "strømme udenom" raketkroppen opstår der et lille normalkraftbidrag på den del af raketkroppen hvor finnerne sidder. Dette bidrag vil i praksis øge virkningen af finnerne en anelse, hvilket i de fleste tilfælde betyder at stabilitetsmarginen reelt bliver en anelse større end hvad man beregner ved hjælp af Barrowman's metode.

2 Interferens mellem flere sæt finner

På en raket med 2 (eller flere) sæt finner vil luftstrømningen omkring det forreste finnesæt påvirke strømningen omkring det bageste. Dette skyldes at finnerne giver anledning til hvirveldannelse, og at de bageste finner kan mærke denne hvirvel, idet den vil ændre den angrebsvinkel som det bageste finnesæt oplever. Resultatet bliver at det bageste finnesæt mister lidt af sin normalkraft, hvilket almindeligvis betyder at stabilitetsmarginen reelt bliver mindre end beregnet.

3 Interferens mellem næse og raketkrop

Såfremt den cylindriske raketkrop bag næsekeglen (eller bag en konisk overgang) er meget lang, opstår der et normalkraftbidrag på den forreste del af bagkroppen. Dette bidrag vokser med raket (bag)kroppens længde. Såfremt bagkroppen er kortere end ca. 10 gange diameteren er denne interferens neglignel. Interferens mellem raketkrop og næsekegle giver anledning til en stabilitetsmargin som er mindre end beregnet.

4.0 Referencer:

- Barrowman, James S Calculating the center of pressure of a model rocket, Technical Information Report TIR-33. Centuri Engineering Company, 1968.
- Barrowman, James S Elliptical fin C.P. equations.
- Peter O. Nielsen og Jørgen Franck Beregning af areal, volumen, massemidt punkt og inertimomenter for en klasse af omdrejningslegemer med cirkelbuegeometri. Dansk Amatør Raket Klub.
- Hoerner
DATCOM Fluid dynamic drag
- J. M. Simon, W. B. Blake AIAA-99-4258. Missile DATCOM: High angle of attack capabilities

Appendix

Beregning af stall vinkel:

$$\alpha_s = K_{bs} \cdot \alpha_{CLmax} = K_{bs} \cdot ((\alpha_s)_{base} + \Delta \alpha_s)$$

$(\alpha_s)_{base}$ = chart 4.1.3.4-25a

$\Delta \alpha_s$ = chart 4.1.3.4-25b

$$CL_{max} = (CL_{max})_{base} + \Delta CL_{max}$$

$(CL_{max})_{base}$ = chart 4.1.3.4-23b

ΔCL_{max} = chart 4.1.3.4-24a

K_{bs} = Chart 4.3.1.4-12C

$$C_{N\alpha\alpha} = (C_{N\alpha\alpha})_{ref} + \Delta C_{N\alpha\alpha}$$

$$(C_{N\alpha\alpha})_{ref} = \frac{\frac{CL_{MAX}}{\cos(\alpha_{CLmax})} - \frac{1}{2}(C_{N\alpha})_f \cdot \sin(2\alpha_{CLmax})}{\sin(\alpha_{CLmax})|\sin(\alpha_{CLmax})|}$$